

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE · BAND 37 · HEFT 2 · JANUAR 1940

Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen

Von Karl Bechert

(Mit 7 Abbildungen)

Zusammenfassung

Behandlung der Bewegung ebener Störungen in reibungsfreien Gasen und Flüssigkeiten bei polytropen Zustandsänderungen (Index n). — Aufgabestellung und Ergebnisse (§ 1). Zurückführung auf die Differentialgleichung von Darboux (§ 2). Allgemeine Eigenschaften der Bewegung (§ 3). Die ausgearbeiteten Fälle: Fortschreitende Welle und isotherme Bedingungen (§ 4). Allgemeine Integration der Darboux'schen Differentialgleichung für $n = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots$ (§ 5). Lösung der Anfangswertaufgabe vom allgemeinen Integral aus; explizite Angabe der Lösung für $n = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}$. Zusammenhang mit der Riemannschen Lösung (§ 6). Beispiele: Dichteschwankung im ruhenden Gas, Reflexion einer Dichtestörung an einer festen Wand, stehende Schwingungen zwischen festen Wänden (alles für $n = 3$). Dichtefront $\left(n = \frac{5}{3}\right)$ (§ 7). Stehende Schwingungen zwischen festen Wänden für $n = \frac{(2m+3)}{(2m+1)}$, m ganz, ≥ 0 (§ 8).

§ 1. Aufgabestellung, Ergebnisse

Bewegungen in reibungsfreien Gasen werden durch die Kontinuitätsgleichung und die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen beschrieben:

$$(1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \nabla p = \mathbf{0}.$$

Wir betrachten im folgenden nur ebene Störungen, also Vorgänge, die von einer kartesischen Koordinate x und der Zeit t abhängen; von der Geschwindigkeit soll nur die x -Komponente u von Null verschieden sein. Wenn x senkrecht steht zur Schwererichtung z und sonst keine Volumkräfte vorhanden sind, verschwindet $\mathbf{0}$ aus der Bewegungsgleichung für die x -Richtung und z kommt darin nur als konstanter Parameter vor. Dann folgt aus (1) das bekannte Gleichungssystem (Differentiationen bezeichnen wir von jetzt an durch untere Indizes):

$$(2) \quad \varrho_t + u \varrho_x + \varrho u_x = 0; \quad u_t + u u_x + \frac{1}{\varrho} p_x = 0.$$

Für polytrope Zustandsänderungen (also auch für adiabatische) hängt der Druck p mit der Dichte ϱ zusammen gemäß:

$$(3) \quad p = a^2 \frac{\varrho^n}{n};$$

a^2 ist eine positive Konstante; n ist von Null verschieden, bei adiabatischen Vorgängen ist es gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärmen:

$$(3a) \quad n = \kappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

Durch geeignete Wahl der Variablen erhält man aus (2), (3) als einzige zu lösende Gleichung die Differentialgleichung von Darboux, wenn $n \neq 1$, (§ 2). Schon vor der Integration dieser Gleichung lassen sich über die Lösungen der Aufgabe eine Reihe von Aussagen machen: Jede ebene Störung in einem reibungsfreien Gas führt im allgemeinen zur Ausbildung von Wellenfronten, zu Stoßwellen (§ 3). Wenn der Zusammenhang

$$\xi \pm \eta \equiv \frac{2a\varrho^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n-1}} \pm u\sqrt{n-1} = \text{const}$$

in einem gewissen Raumgebiet einmal besteht, so bleibt er erhalten in der Weise, daß die Grenzen dieses Gebiets sich mit der in § 4 berechneten zeitlich unveränderlichen Geschwindigkeit fortbewegen. In diesem Fall kann die allgemeine Lösung der Gleichungen (2), (3) angegeben werden (§ 4). Sie stellt eine fortschreitende Welle dar, die sich immer mehr verzerrt. Auch im allgemeinen Fall ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit fester Werte von $\xi \pm \eta$ bekannt (§ 3); sie ist zeitlich veränderlich, außer wenn $n = 3$. Allgemein ist sie gleich

$$\frac{2\eta \pm (n-1)\xi}{2\sqrt{n-1}} = u \pm a\varrho^{\frac{n-1}{2}};$$

bei adiabatischen Bedingungen hat sie den Wert $u \pm c$; c ist die Schallgeschwindigkeit. Die beiden Wellen ($\xi + \eta$ und $\xi - \eta$ als Funktion von x, t) laufen also von der Störung nach entgegengesetzten Seiten weg. Bei Störungen, die sich frei in einem ungestörten Gebiet ausbreiten können, führt das zur schnellen Trennung der beiden Wellen. Man hat dann zwei Dichtewellen (§ konstanter Breite nach entgegengesetzten Seiten, bei denen feste Werte von ϱ, u mit zeitlich unveränderlicher Geschwindigkeit fortschreiten (§ 3). Allgemein gilt wieder: Die Extrema von $\xi \pm \eta$ als Funktion von x behalten im Laufe der Bewegung ihre Höhe bei. Bei freier Ausbreitung der Störungen bleibt daher alsbald nach der

Trennung der $\xi \pm \eta$ -Wellen die Kammhöhe der beiden Wellen zeitlich konstant.

Der Fall $n = 1$ führt auf die Telegraphengleichung. Für die Lösungen von (2), (3) gelten hier dieselben Aussagen wie für $n \neq 1$; an die Stelle der adiabatischen Schallgeschwindigkeit tritt die isotherme (§ 4).

Die Gleichung von Darboux kann allgemein integriert werden, wenn

$$(4) \quad n = 1 + \frac{2}{2m+1}, \quad m \text{ eine ganze Zahl } \geq 0 \text{ (§ 5).}$$

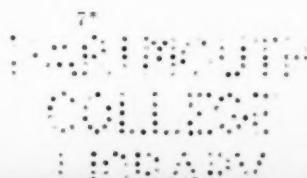
Diese Annahme bedeutet bei adiabatischen Vorgängen

$$(4a) \quad z = \frac{2m+3}{2m+1},$$

was nach der kinetischen Gastheorie für Gase mit ungerader Anzahl f von Freiheitsgraden zutrifft. Der Fall $f = 1$ gibt ein schematisches Modell eines Gases, das schon Clausius gelegentlich benutzt hat; hier ist $z = 3$. $f = 3$ bedeutet einatomige Gase ($z = \frac{5}{3}$),

$f = 5$ zweiatomige ($z = \frac{7}{5}$). Allgemein: Die in § 5 angegebene Lösung beschreibt ebene adiabatische Vorgänge in allen Gasen, für welche z einen der Werte nach Gl. (4a) hat; aber auch polytrope Änderungen mit $n = \frac{(2m+3)}{(2m+1)}$. In § 6 wird die Anfangswertaufgabe (ρ, u vorgegeben für $t = 0$) für diese Fälle behandelt und ihre Lösung für $n = 3, \frac{5}{3}$ und $\frac{7}{5}$ ausführlich hingeschrieben und ein Beispiel zu $n = \frac{5}{3}$ gebracht. § 7 gibt Beispiele zu $n = 3$: Dichteschwankung in einem ruhenden Gas, Reflexion einer Dichtestörung an einer festen Wand, stehende Schwingungen. Bei den stehenden Schwingungen wandert nach Ausbildung der Stoßwelle ein Dichtestoss periodisch zwischen den Wänden hin und her. Für den Fall $n = \frac{5}{3}$ dient als Beispiel eine Dichtefront in einem Gas. In § 8 wird die allgemeine Darstellung stehender Wellen angegeben, für $n = \frac{(2m+3)}{(2m+1)}$.

Historische Bemerkung: Als ich die im folgenden dargestellten Ergebnisse fand, hielt ich sie für neu. Ich habe erst nach Abschluß aller wesentlichen Rechnungen (§ 1—7) gesehen, daß schon Riemann die Aufgabe behandelt hat (Abhandlungen Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 1860); er hat die Anfangswertaufgabe mit der nach ihm benannten Integrationsmethode für beliebige n gelöst.



Für die in (4) genannten n kann man aber das allgemeine Integral der Differentialgleichungen hinschreiben, das hat Riemann nicht bemerkt. Bei Hadamard in den *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris 1903, S. 168, findet es sich zitiert, aber in anderer Form. Hadamard macht keinen Gebrauch davon. Die direkte Lösung der Anfangswertaufgabe vom allgemeinen Integral aus, ohne Verwendung der Riemannschen Methode, dürfte neu sein; sie führt natürlich zum gleichen Ergebnis wie die Riemannsche allgemeine Methode (§ 6). Einen wesentlichen Vorteil des in § 5 angegebenen allgemeinen Integrals sehe ich darin, daß man mit ihm beliebige Lösungen besser untersuchen kann als mit der unübersichtlicheren Riemannschen Lösung; vgl. z. B. für $n = \frac{5}{3}$ die Gl. (56), die dem allgemeinen Integral entspricht, (wenn g, h beliebig gelassen werden), mit der daraus durch Einsetzen der Anfangswerte gebildeten Riemannschen Lösung (59a, b) oder für $n = \frac{7}{5}$ die Gl. (60) mit den Riemannschen Gl. (61a, b). Die in § 7 und 8 angegebene Lösung für stehende Wellen ist neu, soviel ich sehen kann. Einige von den Ergebnissen des § 3 über die allgemeinen Eigenschaften der Integrale scheinen auch noch nicht bekannt zu sein, ebensowenig der Umstand, daß der Fall $n = 3$ trotz seiner Einfachheit den physikalischen Vorgängen schon recht gut entspricht.

§ 2. Zurückführung auf die Differentialgleichung von Darboux bei beliebigem $n \neq 1$

Wir nehmen zunächst an, daß $n \neq 1$ sei; das bedeutet physikalisch bei Gasen Ausschließen isothermer Vorgänge. Durch den Ansatz:

$$(5) \quad \sigma = \frac{a^2 \varrho^{n-1}}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p}{\varrho}$$

erhält man aus (2), (3) [multipliziere die erste Gl. (2) mit $a^2 \varrho^{n-2}$]:

$$(6) \quad \sigma_t + u \sigma_x + (n-1) \sigma u_x = 0; \quad u_t + u u_x + \sigma_x = 0.$$

In diesen Gleichungen sind u, σ Funktionen von x, t ; man kann die Abhängigkeit aber umdrehen und behaupten, daß x, t Funktionen von u, σ seien. Dadurch werden die Gl. (6) linear in den dann abhängigen Variablen x, t , weil die Funktionaldeterminante von x, t nach u, σ aus den Gleichungen herausfällt. Der Grund dazu ist der, daß die Gl. (6) linear sind in $\sigma_x, \sigma_t, u_x, u_t$ und daß in (6) keine Glieder vorkommen, welche keine Differentialquotienten von u oder σ enthalten.

Die Umrechnung läuft so: Es ist

$$(7) \quad du = u_x dx + u_t dt,$$

und wegen

$$(8) \quad x = x(u, \sigma), \quad t = t(u, \sigma)$$

ergibt sich aus (7) durch Einsetzen von dx, dt aus (8) die Identität:

$$du = u_x (x_u du + x_\sigma d\sigma) + u_t (t_u du + t_\sigma d\sigma).$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$1 = u_x x_u + u_t t_u;$$

$$0 = u_x x_\sigma + u_t t_\sigma;$$

aus

$$d\sigma = \sigma_x dx + \sigma_t dt$$

schließt man ebenso auf:

$$0 = \sigma_x x_u + \sigma_t t_u;$$

$$1 = \sigma_x x_\sigma + \sigma_t t_\sigma.$$

Die Funktionaldeterminante:

$$(9) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_u & t_u \\ x_\sigma & t_\sigma \end{vmatrix}.$$

ist von Null verschieden, wenn u und σ voneinander unabhängig sind, was wir zunächst voraussetzen wollen. Dann gilt:

$$u_x = \frac{t_\sigma}{\Delta}; \quad u_t = -\frac{x_\sigma}{\Delta}; \quad \sigma_x = -\frac{t_u}{\Delta}; \quad \sigma_t = \frac{x_u}{\Delta};$$

und aus (6) wird:

$$(10) \quad x_u - u t_u + (n-1) \sigma t_\sigma = 0; \quad x_\sigma - u t_\sigma + t_u = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist linear in x, t , läßt also beliebige Überlagerung von Lösungen zu. Man kann es erheblich vereinfachen durch die Einführung einer Funktion $V(u, \sigma)$ mit den Eigenschaften:

$$(11) \quad x - u t = V_u; \quad t = -V_\sigma.$$

Die Integrabilitätsbedingung $V_{u\sigma} = V_{\sigma u}$ ist dann gleichbedeutend mit der zweiten Gl. (10) und es bleibt als einzige Gleichung, die gelöst werden soll:

$$(12) \quad V_{uu} = V_\sigma + (n-1) \sigma V_{\sigma\sigma}.$$

Durch den Ansatz:

$$(13) \quad \sigma = \frac{\xi^2}{4}, \quad \xi = +2\sqrt{\sigma}; \quad u = \frac{\eta}{1-n-1}$$

erhält man aus (12) die Differentialgleichung von Darboux:

$$(14) \quad V_{\xi\xi} + \frac{k}{\xi} V_\xi = V_{\eta\eta}; \quad k = \frac{3-n}{n-1}.$$

Aus (11) folgt:

$$(15) \quad \frac{x}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta t}{n-1} = V_\eta; \quad -\frac{\xi t}{2} = V_\xi.$$

(15) ist die allgemeine Lösung von (6), bei beliebigem k, n ($\neq 1, 0$), wenn V die allgemeine Lösung von (14) ist.

Zur Bedeutung von ξ, η : es gilt

$$(16) \quad \xi = \frac{2a\varrho^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n-1}}; \quad \eta = u\sqrt{n-1};$$

für adiabatische Vorgänge wird $n = \kappa$. Die Schallgeschwindigkeit c ist aber für Gase:

$$(17) \quad c = \sqrt{\frac{p_x}{\varrho}} = \frac{\sqrt{\kappa-1}}{2} \xi = a\varrho^{\frac{\kappa-1}{2}},$$

nach (5) und (13). ξ ist also der Schallgeschwindigkeit proportional und η der Strömungsgeschwindigkeit. Der Fall $\xi \pm \eta = \text{const}$, der im folgenden öfter vorkommt, bedeutet bei adiabatischen Bedingungen:

$$(18) \quad c \pm u \frac{(\kappa-1)}{2} = \text{const.}$$

Zur Probe auf die Lösung (15) differentiere man sie nach x und t und beachte, daß wegen (14):

$$V_{\xi\xi} + \frac{t}{2} = V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1};$$

es ergibt sich ein Paar von linearen inhomogenen Gleichungen für ξ_x, η_x und eines für ξ_t, η_t ; beide Paare haben dieselbe Determinante Δ_1 und man erhält:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_x \cdot \Delta_1 \cdot \sqrt{n-1} = V_{\xi\eta}; \quad \eta_x \cdot \Delta_1 \cdot \sqrt{n-1} = -\left(V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1}\right); \\ \xi_t \cdot \Delta_1 \cdot (n-1) = -\eta V_{\xi\eta} + \frac{n-1}{2} \xi \left(V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1}\right); \\ \eta_t \cdot \Delta_1 \cdot (n-1) = \eta \left(V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1}\right) - \frac{n-1}{2} \xi V_{\xi\eta}; \\ \Delta_1 = V_{\xi\eta}^2 - \left(V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1}\right)^2. \end{array} \right.$$

Es empfiehlt sich, die Gl. (6) von u, σ auf ξ, η umzurechnen; dann lauten sie:

$$(20) \quad \xi_t + \frac{\eta \xi_x}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} \xi \eta_x = 0; \quad \eta_t + \frac{\eta \eta_x}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} \xi \xi_x = 0.$$

Einsetzen von (19) zeigt, daß die Gleichungen identisch erfüllt sind.

§ 3. Allgemeine Eigenschaften der Lösungen der Aufgabe (2), (3)

Man kann einige wichtige Eigenschaften der Lösungen von (2), (3) angeben, ohne die Gl. (14) integriert zu haben. Dazu schreiben wir (20) um in:

$$(20a) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \xi_x \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\eta}{\sqrt{n-1}} \right) - \frac{\sqrt{n-1}}{2} \xi \eta_x; \\ \frac{d\eta}{dt} = \eta_x \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\eta}{\sqrt{n-1}} \right) - \frac{\sqrt{n-1}}{2} \xi \xi_x. \end{cases}$$

Mit der Bezeichnung

$$(21) \quad \xi + \eta = v, \quad \xi - \eta = w$$

folgt

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = v_x \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\eta}{\sqrt{n-1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{2} \xi \right); \\ \frac{dw}{dt} = w_x \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\eta}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} \xi \right). \end{cases}$$

Man sieht: Wenn $v_x = 0$, wird $\frac{dr}{dt} = 0$; entsprechendes gilt für w .

Die Extrema von v, w (es ist gleichzeitig $r_t = 0$) bleiben daher bei der Bewegung in ihrer Höhe unverändert.

Weiter: Wenn in einem Bereich von x -Werten $v = \text{const} = A_+$ oder $w = \text{const} = A_-$ zu irgendeiner Zeit $t = T$, dann ist in diesem Zeitpunkt in dem Bereich auch $v_x = 0$ bzw. $w_x = 0$; nach (22) bleibt dann die Beziehung $v = A_+$ bzw. $w = A_-$ in dem sich bewegenden Bereich ständig erhalten.

Wenn $v_x \neq 0$ bzw. $w_x \neq 0$, kann man aus (22) schließen: Die Geschwindigkeit, mit der ein bestimmter Wert $v = \alpha_+$ von v bzw. $w = \alpha_-$ von w sich fortbewegt, ist:

$$(23) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2\eta \pm (n-1)\xi}{2\sqrt{n-1}} = u \pm a \varrho^{\frac{n-1}{2}}.$$

Der Wert $v = \alpha_+$ läuft also mit der Geschwindigkeit

$$(23a) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2\alpha_+ + (n-3)\xi}{2\sqrt{n-1}},$$

der Wert $w = \alpha_-$ mit der Geschwindigkeit

$$(23b) \quad \frac{dx}{dt} = - \frac{2\alpha_- + (n-3)\xi}{2\sqrt{n-1}}.$$

Das gilt aus Stetigkeitsgründen auch noch, wenn $v_x = 0$ bzw. $w_x = 0$, d. h. für die Extrema von v, w . Für $n = 3$ sind die Geschwindig-

keiten (23 a, b) konstant. Bei adiabatischen Zustandsänderungen werden sie gemäß (23), (17) zu

$$(24a) \quad \frac{dx}{dt} = u + c \text{ (Geschwindigkeit von } v = \text{const})$$

und

$$(24b) \quad \frac{dx}{dt} = u - c \text{ (Geschwindigkeit von } w = \text{const});$$

das ist Summe und Differenz von Strömungs- und Schallgeschwindigkeit. Es ist aber zu beachten, daß u und c raumzeitlich veränderlich sind und für die v -Welle andere Werte haben werden als für die w -Welle.

Wenn die v -, w -Wellen sich immer weiter voneinander entfernen, was bei Störungen der Fall ist, die sich in ungestörten Gebieten frei ausbreiten können, so wird im Gebiet der v -Welle $w \approx \text{const} = A_1$ und im Gebiet der w -Welle $v \approx \text{const} = A_2$. $A_{1,2}$ sind die Werte von w , v im ungestörten Gebiet. Die Geschwindigkeiten für $v = \alpha_+$ bzw. $w = \alpha_-$ werden dann:

$$(23c) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_+ (n+1) + (n-3) A_1}{4\sqrt{n-1}}$$

bzw.

$$(23d) \quad \frac{dx}{dt} = - \frac{\alpha_- (n+1) + (n-3) A_2}{4\sqrt{n-1}},$$

also zeitlich konstant, weil α_{\pm} per definitionem konstant ist. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit eines festen Wertes von u ist dann durch (23c) bzw. (23d) gegeben, die eines festen Wertes von ϱ ist ebenso groß, weil im betrachteten Gebiet $w \approx A_1$ bzw. $v \approx A_2$ ist und daher durch $v = \alpha_+$ bzw. $w = \alpha_-$ die Werte von ϱ , u einzeln gegeben und zeitlich konstant sind. Das gilt insbesonders auch bei adiabatischen Bedingungen.

Punkte mit gleichem α_+ bewegen sich im Gültigkeitsgebiet von (23c) mit gleicher Geschwindigkeit. Folglich bleibt die Breite der v -Welle erhalten, sobald sie sich von der w -Welle praktisch getrennt hat, die Abstände der Punkte, die gleiches v haben, bleiben unverändert. Die Form der v -Welle ändert sich aber bei der Bewegung, und zwar so, daß die Punkte größeren v -Wertes, das heißt hier größerer Dichte wegen $\alpha_+ \approx 2\xi - A_1$, schneller laufen. Entsprechendes gilt für die w -Welle. Ist die Störung eine Dichterhöhung gegenüber dem Normalwert (Verdichtungswelle), so wird sie daher an der Vorderseite immer steiler, an der Rückseite immer flacher; die Wellenfront wird schließlich beliebig steil, es entsteht ein Dichtestoß, von dem im folgenden weiter die Rede ist.

Bedeutet die Störung eine Verminderung der Dichte (Verdünnungswelle), so wird sie an der Vorderseite immer flacher, an der Rückseite immer steiler, an dieser erfolgt schließlich der Anstieg der Dichte vom Minimum aus sehr steil, die Rückseite der Welle wird hier zum Dichtestöß. Verdünnungsstöße sind hiernach nicht möglich, eine Welle, die plötzliches Absinken der Dichte mit sich brächte, gibt es im betrachteten Bereich nicht.

Je größer die Amplitude B der Welle bei gleicher Anfangsbreite C ist, desto größer ist der Unterschied zwischen der größten und der kleinsten v - bzw. w -Geschwindigkeit, desto schneller also kommt es zur Ausbildung der Stoßwelle. Verringerung von C bei gleichem B wirkt ebenso wie Vergrößerung von B bei gleichem C . Auf den ungestörten Wert A von v bzw. w kommt es nicht an, weil nur der Geschwindigkeitsunterschied für den Zeitpunkt des Auftretens der Stoßwelle von Bedeutung ist; aus der Differenz zweier Geschwindigkeiten dx/dt fällt aber nach (23c, d) die Größe A heraus. Da v, w die Dimension einer Geschwindigkeit hat, so muß die Laufzeit t von der Trennung der v, w -Wellen an bis zur Ausbildung der Stoßwelle aus Dimensionsgründen proportional C/B sein. Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Form der Welle und von n ab.

Die Formveränderung der Welle geschieht aber, wie gesagt, ohne Veränderung ihrer Breite und Höhe; es ist so, als ob die Punkte gleicher Dichte in der Welle durch Scharniere miteinander verbunden wären. Die Konstanz von ϱ, u bei der Bewegung hat zur Folge, daß z. B. auf dem Wellenkamm Dichte und Strömungsgeschwindigkeit ständig ihren Wert beibehalten. Die Strömungsgeschwindigkeit ist gemäß $|\eta| = |\xi - A_{1,2}|$ durch die Dichte bestimmt.

Solange die v -, w -Wellen sich merklich überlagern, ist die Ausbreitung komplizierter; die Wellengeschwindigkeiten sind dann zeitlich veränderlich und hängen von ξ und η ab. Nur im Fall $n = 3$ bleibt die Breite während der ganzen Bewegung unverändert und die Wellengeschwindigkeit ständig konstant; (23a, b) geht dann in $\frac{dx}{dt} = \pm \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}}$ über.

Die Wellengeschwindigkeit ist übrigens allgemein nicht gleich der Strömungsgeschwindigkeit, wie man an (23) oder (24a, b) sehen kann.

Eine weitere allgemeine Eigenschaft der Lösungen ist, daß die Größen $\xi_x, \eta_x, \xi_t, \eta_t$ für eine im allgemeinen reelle Zeit t unendlich werden, und zwar alle vier gleichzeitig. Das tritt ein, wenn $A_1 = 0$ wird, d. h. wenn:

$$(25) \quad t = (n - 1)(\pm V_{\xi\eta} - V_{\eta\eta}).$$

Das Unendlichwerden der Differentialquotienten bedeutet eine endliche Änderung von Dichte und Strömungsgeschwindigkeit auf beliebig kleiner Strecke, also eine Stoßwelle. Die Neigung von ξ_x, η_x, \dots verändert sich von da an im allgemeinen stetig weiter, so daß man zu festem t und x im allgemeinen mehrere Werte von ξ, η bekommt. Die Dichte und die Strömungsgeschwindigkeit würde dann mehrdeutig werden. Von dem Zeitpunkt (25) an beschreiben die Gleichungen den Vorgang also nicht mehr richtig. Daß überhaupt ein Unendlichwerden von $\xi_x, \eta_x, \xi_t, \eta_t$ herauskommt, liegt offenbar daran, daß wir Reibung und Wärmeleitung vernachlässigt haben. In Wirklichkeit wird die Welle in der Nähe des Zeitpunktes (25) aufhören, immer steiler zu werden, und mit einer großen aber endlichen Steilheit weiterwandern, die durch Reibung und Wärmeleitung bedingt ist.

Die rechte Seite von (25) hängt nur von ξ, η ab; da aber ξ, η selbst wieder Funktionen von x, t sind, so ergibt sich eine Beziehung von der Form: $x = F(t)$. D. h.: Für bestimmte zusammengehörige Werte von x und t werden die Differentialquotienten ξ_x, η_x, \dots unendlich. Physikalisch wichtig als Zeit und Ort des Auftretens der Stoßwelle ist das kleinste t und das zugehörige x , zu dem die Gleichung $x = F(t)$ reelles x gibt. Dieses x ist im allgemeinen für die $\xi + \eta$ -Welle und die $\xi - \eta$ -Welle verschieden.

§ 4. Die Fälle $u = u(\sigma)$ und $n = 1$

1. Wenn $u = u(\sigma)$, wenn also u von der Dichte ϱ abhängig ist, kann der Übergang von (6) zu (10) nicht gemacht werden, weil die Funktionaldeterminante Δ Null wird. Die allgemeine Lösung von (6) für diesen Fall läßt sich aber leicht angeben und ist lange bekannt.

Wegen $u = u(\sigma)$ ist auch $\eta = \eta(\xi)$, und daraus folgt, wie man durch Einsetzen von $\eta = \eta(\xi)$ in (20) erkennt: $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = 1$, also:

$$(26) \quad \eta = \pm \xi + A,$$

A eine Konstante. Es bleibt die Differentialgleichung:

$$(27) \quad \eta_t + \frac{\eta \eta_x}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} (\eta - A) \eta_x = 0,$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$(28) \quad \eta = F\left(x + \frac{A\sqrt{n-1}}{2} t - \frac{n+1}{2\sqrt{n-1}} \eta t\right);$$

F ist eine beliebige Funktion des Arguments.

Wenn η klein ist, geht (28) in die Darstellung der verzerrungsfreien ebenen Welle über. Allgemein gelten für (28) dieselben Betrachtungen wie für die Lösungen im Fall $u \neq u(\sigma)$. Man findet:

$$\eta_x = \frac{F'}{1 + \frac{t(n+1)}{2\sqrt{n-1}} F'}; \quad \eta_t = \frac{F' \left(\frac{A\sqrt{n-1}}{2} - \frac{(n+1)}{2\sqrt{n-1}} \eta \right)}{1 + \frac{t(n+1)}{2\sqrt{n-1}} F'};$$

der Strich bedeutet Differentiation nach dem Argument.

$\xi + \eta \equiv v = \text{const} = A_+$ macht dv/dt identisch Null; für $w \equiv \xi - \eta = A_+ - 2\eta$ folgt dann aus (22):

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta_x \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\eta}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} \frac{d\xi}{dt} \right);$$

ein fester Wert β_+ von η schreitet daher mit der Geschwindigkeit:

$$(29a) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2\beta_+ - (n-1)\xi}{2\sqrt{n-1}} = \frac{(n+1)\beta_+ - (n-1)A_+}{2\sqrt{n-1}}$$

fort. (Bei adiabatischen Bedingungen wird $\frac{dx}{dt} = u - c$.) Die Geschwindigkeit (29a) ist zeitlich unveränderlich, da sie aber für verschiedene η verschieden ausfällt (verschiedenes β_+), so verzerrt sich die Wellenform bei gleichbleibender Höhe und Breite. Im allgemeinen Fall (23) kommt die Verzerrung durch die „Variationsbreite“ von ξ und η zustande.

Der Fall $\xi - \eta \equiv w = \text{const} = A_-$ gibt für festen Wert β_- von η als Geschwindigkeit des Fortschreitens:

$$(29b) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2\beta_- + (n-1)\xi}{2\sqrt{n-1}} = \frac{(n+1)\beta_- + (n-1)A_-}{2\sqrt{n-1}},$$

die ebenfalls zeitlich unveränderlich ist (bei Adiabasie wird sie gleich $u + c$). η_x, η_t werden gleichzeitig unendlich für

$$t = -\frac{2\sqrt{n-1}}{n+1} \cdot \frac{1}{F'}.$$

Die Bedingung (26) kann offenbar in der Weise erfüllt werden, daß ξ, η in einem gewissen Gebiet (I) einzeln konstant sind, in einem andern (II) aber nur ihre Summe bzw. Differenz; in I herrscht dann Ruhe oder ungestörter Zustand (u braucht nicht Null zu sein). Die Betrachtungen des Absatzes 1 beantworten also die Frage nach der Bewegung einer Störung in ein ungestörtes Gebiet hinein und stimmen mit den entsprechenden Betrachtungen des § 3 überein; insbesondere ist (29a) gleichbedeutend mit (23d), (29b) mit (23c).

2. Im Falle $n = 1$ setze man:

$$(30) \quad \sigma = a^2 \lg \rho$$

und erhält an Stelle von (6) die Gleichungen:

$$(31) \quad \sigma_t + u \sigma_x + a^2 u_x = 0; \quad u_t + u u_x + \sigma_x = 0;$$

und an Stelle von (10):

$$(32) \quad x_u - u t_u + a^2 t_\sigma = 0; \quad x_\sigma - u t_\sigma + t_u = 0.$$

Der Ansatz (11) ist hier wieder zweckmäßig und führt auf die Telegraphengleichung für V :

$$(33) \quad V_{uu} - V_\sigma - a^2 V_{\sigma\sigma} = 0.$$

Aus (11) erhält man:

$$u_x \cdot A_1 = V_{\sigma\sigma}; \quad \sigma_x \cdot A_1 = -V_{u\sigma}; \quad u_t \cdot A_1 = -u V_{\sigma\sigma} + V_{u\sigma};$$

$$\sigma_t \cdot A_1 = u V_{u\sigma} - a^2 V_{\sigma\sigma}; \quad A_1 = (V_{uu} + t)^2 \cdot \frac{1}{a^2} - V_{u\sigma}^2.$$

Wir setzen

$$(34) \quad a u + \sigma = v, \quad a u - \sigma = w,$$

und bekommen aus (31)

$$(35) \quad \frac{dv}{dt} = v_x \left(\frac{dx}{dt} - u - a \right); \quad \frac{dw}{dt} = w_x \left(\frac{dx}{dt} - u + a \right).$$

Die Fortschreitungsgeschwindigkeit eines festen Wertes α_+ von v bzw. α_- von w ist hier allgemein:

$$(36) \quad \frac{dx}{dt} = u \pm a.$$

Das entspricht genau den Formeln (24a, b); denn a spielt hier die Rolle der Schallgeschwindigkeit, die ja im isothermen Fall gleich $\sqrt{p/\rho}$ ist.

$u_x, u_t, \sigma_x, \sigma_t$ werden (gleichzeitig) unendlich, wenn:

$$t = -V_{uu} \pm a V_{u\sigma}.$$

Ist zu bestimmter Zeit $t = T$ in einem Gebiet $v = \text{const} = A_+$ gewesen, so bleibt in dem sich bewegenden Gebiet $v = A_+$ erhalten; entsprechendes gilt für $w = A_-$. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet in diesem Fall:

$$(37) \quad u = F(x - (u \mp a)t);$$

das obere Vorzeichen gilt für $v = A_+$, das untere für $w = A_-$; F ist eine beliebige Funktion des Arguments. Die Fortschreitungsgeschwindigkeiten (36) sind dann für einen festen Wert β_+ von u , wenn $v = A_+$:

$$\frac{dx}{dt} = \beta_+ - a,$$

und für einen festen Wert β_- von u , wenn $w = A_-$:

$$\frac{dx}{dt} = \beta_- + a.$$

Beide Geschwindigkeiten sind zeitlich konstant.

u_x, u_y werden hier unendlich für

$$t = -\frac{1}{F'}.$$

Der Fall $n = 1$ soll aber nicht weiter besprochen werden, weil er physikalisch nur von geringem Interesse ist. Im folgenden setzen wir immer $n \neq 1$ voraus.

§ 5. Integration der Differentialgleichung (14) für den Fall (4)

Wenn die Bedingung (4) erfüllt ist, wird gemäß (14)

$$(38) \quad k = 2m;$$

bei adiabatischer Zustandsänderung hat k nach der kinetischen Gastheorie wegen $\kappa = \frac{f+2}{f} = n$ den Wert $f-1$; die Bedingung (38) verlangt dann also ungerades f . Wenn (38) gilt, kann man die allgemeine Lösung von (14) angeben.

Wir beginnen mit dem Fall $k = 0$; das allgemeine Integral von (14) ist dann bekanntlich:

$$V = \Phi(\xi + \eta) + \Psi(\xi - \eta); \quad k = 0.$$

Die rechte Seite kürzen wir mit U ab:

$$(39) \quad U = \Phi(\xi + \eta) + \Psi(\xi \eta).$$

Es gilt der Satz: Wenn W Lösung ist von:

$$(40) \quad W_{\xi\xi} + \frac{l}{\xi} W_\xi - W_{\eta\eta} = 0,$$

dann ist

$$(41) \quad V = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} W$$

Lösung von (14) mit $k = l+2$. Beweis durch Einsetzen von (41) in (14) und Differentiation von (40) nach ξ . Da wir aber für $l = 0$ die allgemeine Lösung von (40) kennen, nämlich $W = U$, so kennen wir damit die allgemeine Lösung von (14) für den Fall (38), d. h. gradzahlige positive k ; sie lautet:

$$(42) \quad V = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdots \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} U, \quad k = 2m,$$

wobei der Operator $\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$ rechts m -mal hin zu schreiben ist. (42) kann etwas vereinfacht werden durch die Bemerkung, daß U_ξ selbst wieder eine Funktion vom Typ U ist, wie man an der Form von U in (39) erkennt; die letzte Differentiation $\partial/\partial \xi$ vor U kann also weggelassen werden.

Die Lösungen der Aufgabe (2), (3), (4) lauten daher wegen (15) in den einfachsten Fällen $k = 0, 2, 4$:

$$(43a) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, \text{ d. h. } n = \frac{3}{1} : \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\eta t}{2} = F(\xi + \eta) - G(\xi - \eta); \\ \quad - \frac{\xi t}{2} = F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta). \end{array} \right.$$

Dabei ist benutzt, daß Differentiation von U , das ja hier Lösung von (14) ist, nach ξ wie gesagt eine Funktion von der gleichen Art gibt, die wir mit $F + G$ bezeichnet haben, und daß Differentiation nach η in Φ das Vorzeichen unverändert läßt, in Ψ aber umgekehrt. Mit anderen Worten: wir haben gesetzt: $\Phi' = F$; $\Psi' = G$, wobei der Strich Differentiation nach dem Argument bedeutet. Das wird in den folgenden Formeln beibehalten.

$$(43b) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2, \text{ d. h. } n = \frac{5}{3} : \sqrt{\frac{3}{2}} x - \frac{3\eta t}{2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} \right]; \\ \quad - \frac{\xi t}{2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} \right]; \end{array} \right.$$

$$(43c) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 4, \text{ d. h. } n = \frac{7}{5} : \sqrt{\frac{5}{2}} x - \frac{5\eta t}{2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} \right]; \\ \quad - \frac{\xi t}{2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} \right]; \end{array} \right.$$

F und G sind jedesmal beliebige Funktionen ihres Arguments. Für adiabatische Vorgänge ist $x = n$ und die Gl. (43a—c) entsprechen den Fällen $f = 1, 3, 5$.

§ 6. Die Anfangswertaufgabe für $k = 2m$

Zur Beschreibung physikalischer Vorgänge mit gegebenem Anfangszustand muß man die Funktionen $F(\xi + \eta)$, $G(\xi - \eta)$ aus den Anfangswerten von ϱ , u bestimmen. Es seien also für $t = 0$ ϱ , u , d. h. ξ , η als Funktionen von x gegeben. Diese Anfangswerte von ξ , η nennen wir $\xi(x)$, $\eta(x)$; gefragt ist nach dem funktionalen Aussehen von F , G .

Die Auszeichnung des „Anfangspunktes“ $t = 0$ in den folgenden Rechnungen ist nicht wesentlich. Jede Aufgabe, bei der $t = 0$ der Anfangspunkt der Zeit ist, und die Funktionen ξ , η in Abhängigkeit von x , t gesucht sind, kann umgerechnet werden in eine Aufgabe, bei der $t = t_0$ der Anfangspunkt ist und $x = x_0$ an die Stelle von x tritt. Dazu setze man:

$$(44) \quad V = -\frac{t_0}{4} \left(\xi^2 + \frac{2\eta^2}{n-1} \right) + \frac{x_0 \eta}{\sqrt{n-1}} + V_1(\xi, \eta);$$

(15)

dann wird aus (15):

$$(45) \quad -\frac{\xi}{2}(t-t_0) = V_1 \xi; \quad \frac{x-x_0}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta(t-t_0)}{n-1} = V_1 \eta.$$

Setzt man noch $t-t_0 = T$, $x-x_0 = X$, so hat man in T und X die Aufgabe, die wir in x, t behandelt haben: nämlich aus den für $T=0$ gegebenen Funktionen $\xi(X)$, $\eta(X)$ die Funktion V_1 zu bestimmen. Die Bemerkungen dieses Absatzes sind nicht an die Voraussetzung $k=2m$ gebunden, zu der wir jetzt zurückkehren wollen.

1. $k=0$. Im Fall $k=0$ läßt sich die Frage nach dem Aussehen von F, G in einfacher Weise beantworten. Nach (43a) ist für $t=0$, wenn wir $\bar{v} = \xi + \eta$, $\bar{w} = \xi - \eta$ schreiben:

$$(46a) \quad F(\bar{v}) = \frac{x}{2\sqrt{2}}; \quad G(\bar{w}) = -\frac{x}{2\sqrt{2}}.$$

Die Umkehrfunktionen zu F und G nennen wir F^{-1} und G^{-1} ; wir würden also \arcsin mit \sin^{-1} bezeichnen. Aus (46a) folgt:

$$(46b) \quad \bar{v} = F^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right); \quad \bar{w} = G^{-1}\left(-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right).$$

Denken wir uns die linken Seiten dieser Gleichungen als Funktionen von x geschrieben, so müssen sie Identitäten in x werden. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\frac{x}{2\sqrt{2}} = \lambda$$

und rechnen \bar{v} , \bar{w} von x auf λ um:

$$(47) \quad \bar{v}(x) = \bar{v}(2\sqrt{2}\lambda) \equiv \varphi(\lambda); \quad \bar{w}(x) = \bar{w}(2\sqrt{2}\lambda) \equiv \psi(\lambda).$$

Die Funktionen $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ sind nach Voraussetzung bekannt, und es gelten in λ die Identitäten:

$$(48a) \quad \varphi(\lambda) = F^{-1}(\lambda); \quad \psi(\lambda) = G^{-1}(-\lambda);$$

daher auch:

$$(48b) \quad \psi(-\lambda) = G^{-1}(\lambda).$$

Damit sind die Umkehrfunktionen zu F, G bekannt; indem man die Umkehrfunktionen zu F^{-1}, G^{-1} bildet, kann man prinzipiell F und G hinschreiben. In Wirklichkeit wird diese Aufgabe nicht immer explizit lösbar sein, es zeigt sich aber bei näherem Zusehen, daß die physikalische Fragestellung auch eher auf F^{-1}, G^{-1} ausgeht als auf F, G . Nach (43a) ist mit $v = \xi + \eta$, $w = \xi - \eta$ [wie in (21)]:

$$(49) \quad \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{vt}{4} = F(v); \quad -\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{wt}{4} = G(w).$$

Offenbar sind F, G im allgemeinen mehrdeutige Funktionen, weil sie x, t als Funktionen von ξ, η , d. h. ϱ, u bestimmen. Gefragt ist aber nach ϱ, u in Abhängigkeit von x, t ; wenn man auch aus (49) ξ, η nicht völlig durch x, t ausdrücken kann, so wird doch die Angabe von F^{-1}, G^{-1} zweckmäßiger sein als die von F, G . Wir kehren daher (49) um, beachten (48a,b) und erhalten:

$$(50a) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \varphi \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{vt}{4} \right); \\ w = \psi \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{vt}{4} \right); \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} k = 0, \text{ d. h. } n = 3. \end{array} \right.$$

Durch Einführung von ϱ, u kommt wegen (47), (21), (16): $v = \bar{v} \left(x - \frac{vt}{\sqrt{2}} \right)$, $w = \bar{w} \left(x + \frac{vt}{\sqrt{2}} \right)$ oder auch:

$$(50b) \quad \left\{ \begin{array}{l} a\varrho + u = a\bar{\varrho} (x - (a\varrho + u)t) + \bar{u} (x - (a\varrho + u)t); \\ a\varrho - u = a\bar{\varrho} (x + (a\varrho - u)t) - \bar{u} (x + (a\varrho - u)t); \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} k = 0, \\ \text{d. h. } n = 3. \end{array} \right.$$

$\bar{\varrho}, \bar{u}$ sind dabei die für $t = 0$ vorgegebenen Funktionen; statt des für $t = 0$ geltenden Arguments x ist aber das in (50b) angegebene Argument einzusetzen.

Wenn für $t = 0$ in einem Gebiet: $\bar{v}(x) = A_+$, A_+ eine Konstante, so bleibt in dem Gebiet dieser Argumentwerte $v = A_+$; da aber das Argument für spätere Zeiten nicht x , sondern

$$x - \frac{vt}{\sqrt{2}} = x - \frac{A_+ t}{\sqrt{2}}$$

lautet, so bewegen sich die Grenzen dieses Gebiets mit der Geschwindigkeit $\frac{A_+}{\sqrt{2}}$, wie es nach (23a) sein muß. Aus $\bar{v}(x) = A_+$ folgt

$a\bar{\varrho}(x) + \bar{u}(x) = B_+ = \frac{A_+}{\sqrt{2}}$, und es ergibt sich, wegen $a\varrho + u = B_+$ im betrachteten Gebiet, aus (50b): $u = \bar{u}(x + B_+ t - 2ut)$, was genau dem Integral (28) entspricht. Wenn in einem Gebiet $\bar{v}(x) = A_-$, so bleibt $w = A_-$; die Geschwindigkeit der Grenzen des Gebiets ist $-\frac{A_-}{\sqrt{2}}$, vgl. (23b). Dann gilt: $a\bar{\varrho}(x) - \bar{u}(x) = B_- = \frac{A_-}{\sqrt{2}} = a\varrho - u$ und: $u = \bar{u}(x - B_- t - 2ut)$, wiederum in Übereinstimmung mit (28).

2. $k = 2$. Wenn $k = 2$ (d. h. $n = \frac{5}{3}$), handelt es sich um die Bestimmung von F, G aus [vgl. (43b)]:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2}} x = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} \right] \right)_{\xi = \bar{\xi}, \eta = \bar{\eta}}; \\ 0 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} \right] \right)_{\xi = \bar{\xi}, \eta = \bar{\eta}}. \end{array} \right.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\frac{F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)}{\xi} = f(\xi, \eta).$$

Der Anfangswert von f ist $f(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = f(\xi(x, 0), \eta(x, 0))$; also gilt:

$$\frac{df(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{dx} = (f_{\xi})_{\bar{\xi}, \bar{\eta}} \cdot \bar{\xi}_x + (f_{\eta})_{\bar{\xi}, \bar{\eta}} \cdot \bar{\eta}_x = \sqrt{\frac{3}{2}} x \cdot \bar{\eta}_x,$$

wegen (51). Folgt:

$$f(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int x \bar{\eta}_x dx.$$

Aus (51) kann man auch schließen auf:

$$(F_v - G_w)_{\bar{v}, \bar{w}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x \bar{\xi}; \quad (F_v + G_w)_{\bar{v}, \bar{w}} = f(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int x \bar{\eta}_x dx.$$

Das bedeutet:

$$(52) \quad \begin{cases} (F_v)_{\bar{v}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\int x \bar{\eta}_x dx + x \bar{\xi} \right] = \lambda(x); \\ (G_w)_{\bar{w}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\int x \bar{\eta}_x dx - x \bar{\xi} \right] = \mu(x); \end{cases}$$

wobei wir für die rechten Seiten, wenn sie als Funktionen von x geschrieben werden, die Abkürzungen λ, μ eingeführt haben. Es kann daher auch x als Funktion von λ oder μ betrachtet werden.

Die Auflösung von λ bzw. μ nach x ist dann nicht möglich, wenn λ bzw. μ konstant sind. Das bedeutet entweder F bzw. G konstant oder \bar{v} bzw. \bar{w} konstant. Im ersten Fall ist F bzw. G damit bereits bekannt, weitere Rechnung also unnötig, im zweiten Fall haben wir die bereits erledigte Lösung (26)–(28) vor uns; denn $v = \text{const}$ bzw. $w = \text{const}$ zu irgendeiner Zeit ($t = 0$) bleibt erhalten; vgl. § 3.

Die linken Seiten in (52) sind Funktionen von \bar{v} bzw. \bar{w} allein, die wir mit $H(\bar{v})$ bzw. $K(\bar{w})$ bezeichnen. Es ist aber:

$$(53) \quad \bar{v}(x(\lambda)) \equiv g(\lambda); \quad \bar{w}(x(\mu)) \equiv h(\mu);$$

daher gelten die Identitäten in λ, μ :

$$(54a) \quad H(g(\lambda)) \equiv \lambda; \quad K(h(\mu)) \equiv \mu;$$

H ist demnach die Umkehrfunktion zu g , K die Umkehrfunktion zu h ; wenn $g(\lambda), h(\mu)$ nicht konstant sind, was wieder den bereits behandelten Fall (26) bedeuten würde, kann man die Umkehrungen bilden:

$$(54b) \quad H(\alpha) = g^{-1}(\alpha); \quad K(\alpha) = h^{-1}(\alpha).$$

Wegen $H(\alpha) = \frac{dF(\alpha)}{d\alpha}$, $K(\alpha) = \frac{dG(\alpha)}{d\alpha}$ folgt weiter:

$$(55) \quad F(\alpha) = \int g^{-1}(\alpha) d\alpha; \quad G(\alpha) = \int h^{-1}(\alpha) d\alpha;$$

damit sind F, G bestimmt. Die Lösung, welche den Anfangsbedingungen genügt, lautet daher:

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{-\xi^2 t}{2} = g^{-1}(v) + h^{-1}(w) - \frac{\int_v^w g^{-1}(\alpha) d\alpha + \int_v^w h^{-1}(\alpha) d\alpha}{\xi} ; \quad v = \xi + \eta; \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}} \eta t \right) \xi = g^{-1}(v) - h^{-1}(w); \quad w = \xi - \eta; \quad n = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

[Wenn g, h beliebig gelassen werden, stellt (56) das allgemeine Integral dar und ist natürlich identisch mit (43b).]

Daß Gl. (56) wirklich die Anfangsbedingungen erfüllt, kann man von ihr ausgehend so zeigen: Setzen wir ξ, η auf den rechten Seiten ein, so ist zu beweisen, daß sie gleich 0 bzw. $\sqrt{\frac{3}{2}} x \xi$ werden. Die rechten Seiten von (52): $\lambda(x), \mu(x)$ sind nach den Anfangsbedingungen als bekannt anzusehen; nach (53) ist aber $g^{-1}(\bar{v}) = \lambda(x); h^{-1}(\bar{w}) = \mu(x)$; das gibt: $g^{-1}(\bar{v}) \pm h^{-1}(\bar{w}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int x \bar{\eta}_x dx$ bzw. $\sqrt{\frac{3}{2}} x \xi$; ferner ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F(\bar{v}) + G(\bar{w})] &= \frac{d}{dx} \left[\int_{\bar{v}}^{\bar{w}} g^{-1}(\alpha) d\alpha + \int_{\bar{v}}^{\bar{w}} h^{-1}(\alpha) d\alpha \right] \\ &= g^{-1}(\bar{v}) \frac{d\bar{v}}{dx} + h^{-1}(\bar{w}) \frac{d\bar{w}}{dx} = (\lambda + \mu) \xi_x + (\lambda - \mu) \bar{\eta}_x \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\xi_x \int x \bar{\eta}_x dx + \xi x \bar{\eta}_x \right] = \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \xi \int x \bar{\eta}_x dx \right]; \end{aligned}$$

also stimmen $F(\bar{v}) + G(\bar{w})$ und $\sqrt{\frac{3}{2}} \xi \int x \bar{\eta}_x dx$ bis auf eine additive Konstante überein, die man dadurch zu Null zu machen hat, daß man die additiven Konstanten in $F(\alpha) = \int g^{-1}(\alpha) d\alpha, G(\alpha) = \int h^{-1}(\alpha) d\alpha$ geeignet wählt. Dabei wird übrigens nur die Summe der in $F(\alpha), G(\alpha)$ zunächst willkürlichen Konstanten bestimmt; mehr ist auch nicht nötig, weil in (56) nur $F + G$ vorkommt. Mit dieser Konstantenwahl, die immer möglich ist, wie man sieht, ist (56) die gesuchte Lösung.

Es ist leicht einzusehen, daß die Konstantenwahl in $\int x \bar{\eta}_x dx$ keinen Einfluß auf das Ergebnis (56) hat. Man kann daher die Konstante in $\int x \bar{\eta}_x dx$ wählen wie man will, auch gleich Null setzen, wenn es bequem ist. F und G können demnach soweit bestimmt werden, als für die Berechnung von x, t nach (56) nötig ist.

Von (56) kann man in gewisser Weise allgemein die Umkehrung bilden, d. h. v, w als Funktion von x, t, v, w anschreiben. Zunächst ist es möglich, g^{-1}, h^{-1} zu vereinfachen. Die Definition (52) von λ läßt sich umschreiben in:

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[x \bar{v} - \int \bar{\eta} dx \right].$$

Durch Umkehrung folgt: $x = \varphi(\lambda)$; $\lambda = \varphi^{-1}(x)$; daher gilt identisch in α :

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\alpha \bar{v}(\alpha) - \int^{\alpha} \bar{\eta} dx \right].$$

Aus (53) folgt: $\bar{v}(x) = \bar{v}(\varphi(\lambda)) \equiv g(\lambda)$; also ist identisch in α :

$$g(\alpha) = \bar{v}(\varphi(\alpha)); \quad \alpha = \varphi^{-1}(\bar{v}^{-1}(g(\alpha))).$$

$\bar{v}^{-1}(g^{-1}(\alpha))$ ist daher die Umkehrfunktion zu g , mithin gleich g^{-1} :

$$(57a) \quad g^{-1}(\alpha) = \varphi^{-1}(\bar{v}^{-1}(\alpha)) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\bar{v}^{-1}(\alpha) \cdot \alpha - \int^{\bar{v}^{-1}(\alpha)} \bar{\eta} dx \right];$$

g^{-1} kann explizit hingeschrieben werden, wenn die Umkehrung \bar{v}^{-1} von \bar{v} explizit anschreibbar ist. In ähnlicher Weise findet man:

$$\mu(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[x \bar{w} + \int \bar{\eta} dx \right]; \quad x = \psi(\mu);$$

$$\psi^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\alpha \cdot \bar{w}(\alpha) + \int^{\alpha} \bar{\eta} dx \right]; \quad \bar{w}(x) = \bar{w}(\psi(\mu)) \equiv h(\mu);$$

$$(57b) \quad h^{-1}(\alpha) = \psi^{-1}(\bar{w}^{-1}(\alpha)) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\bar{w}^{-1}(\alpha) \cdot \alpha + \int^{\bar{w}^{-1}(\alpha)} \bar{\eta} dx \right].$$

Schafft man in (56) den Ausdruck mit den Integralen nach links, so kann nach g^{-1}, h^{-1} aufgelöst und schließlich die Umkehrung gebildet werden; wegen $g = \bar{v} \varphi$, $h = \bar{w} \psi$ kommt als Endformel:

$$(58) \quad \begin{cases} v = \bar{v} \left(\varphi \left[\frac{\xi}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x - \frac{3 \eta t}{2} \right) - \frac{\xi^2 t}{4} + \frac{\int^v g^{-1}(\alpha) d\alpha + \int^w h^{-1}(\alpha) d\alpha}{2\xi} \right] \right); \\ w = \bar{w} \left(\psi \left[-\frac{\xi}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3 \eta t}{2} \right) - \frac{\xi^2 t}{4} + \frac{\int^v g^{-1}(\alpha) d\alpha + \int^w h^{-1}(\alpha) d\alpha}{2\xi} \right] \right); \end{cases} \quad n = \frac{5}{3}.$$

Setzt man g für $\bar{v} \varphi$, h für $\bar{w} \psi$, so sieht man, daß (58) zugleich das allgemeine Integral ist, wenn g, h beliebig gelassen wird. Die

Gl. (56) oder (58) sind für die Diskussion spezieller Lösungen besonders geeignet.

Will man g, h, g^{-1}, h^{-1} völlig aus den Gleichungen beseitigen und durch die Anfangswerte \bar{v}, \bar{w} ausdrücken, so setze man (57 a, b) in (56) ein. Dabei sind die Integrale

$$\int \int \bar{\eta} dx d\alpha, \quad \int \int \bar{\eta} dx d\alpha$$

zu bilden. Es ist:

$$\int \int \bar{\eta} dx d\alpha = v \int \bar{\eta} dx - \int \alpha \bar{\eta} (\bar{v}^{-1}(\alpha)) d\bar{v}^{-1}(\alpha).$$

Da aber

$$\bar{\eta} = \frac{(\bar{v} - \bar{w})}{2}, \quad \text{so gilt: } \bar{\eta} (\bar{v}^{-1}(\alpha)) = \frac{1}{2} (\alpha - \bar{w} (\bar{v}^{-1}(\alpha))),$$

also:

$$\int \int \bar{\eta} dx d\alpha = v \int \bar{\eta} dx - \frac{1}{2} \int (\alpha^2 - \alpha \bar{w} (\bar{v}^{-1}(\alpha))) d\bar{v}^{-1}(\alpha).$$

Das gibt:

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \int g^{-1}(\alpha) d\alpha &= \int \alpha \bar{v}^{-1}(\alpha) d\alpha - \int \int \bar{\eta} dx d\alpha \\ &= \frac{v^2}{2} \bar{v}^{-1}(v) - v \int \bar{\eta} dx - \frac{1}{2} \int \alpha \bar{w} (\bar{v}^{-1}(\alpha)) d\bar{v}^{-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Das letzte Integral lässt sich umschreiben in $-\frac{1}{2} \int \bar{v} \bar{w} dx$, weil $\bar{v} (\bar{v}^{-1}(v)) = v$ ist.

Ebenso findet man:

$$2 \sqrt{\frac{2}{3}} \int h^{-1}(\alpha) d\alpha = - \frac{w^2}{2} \bar{w}^{-1}(w) - w \int \bar{\eta} dx + \frac{1}{2} \int \bar{v} \bar{w} dx.$$

Wegen $\xi = \frac{(v+w)}{2}$ wird:

$$\begin{aligned} - \frac{\xi^3 t}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{(v+w)}{2} (\bar{v}^{-1}(v)v - \bar{w}^{-1}(w)w) \\ &- \frac{(v+w)}{2} \int \bar{\eta} dx - \frac{(v+w)}{2} \int \bar{\eta} dx - \frac{v^2}{2} \bar{v}^{-1}(v) + v \int \bar{\eta} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int \bar{v} \bar{w} dx + \frac{w^2}{2} \bar{w}^{-1}(w) + w \int \bar{\eta} dx - \frac{1}{2} \int \bar{v} \bar{w} dx; \end{aligned}$$

und schließlich:

$$(59a) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\xi^3 t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left[v w (\bar{v}^{-1}(v) - \bar{w}^{-1}(w)) \right. \\ \quad \left. + (v - w) \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} \bar{\eta} dx + \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} \bar{v} \bar{w} dx \right]; \quad n = \frac{5}{3}. \end{array} \right.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$(59b) \quad \xi \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}} \eta t \right) = \frac{1}{2} \left[v \bar{v}^{-1}(v) + w \bar{w}^{-1}(w) - \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} \bar{\eta} dx \right]; \quad n = \frac{5}{3}.$$

$\bar{\eta} = \frac{(\bar{v} - \bar{w})}{2}$ kann noch eingesetzt werden. Zur Erklärung sei nochmals gesagt, daß \bar{v}^{-1} , \bar{w}^{-1} die Umkehrfunktionen zu den ursprünglich gegebenen \bar{v} , \bar{w} sind, in der Weise, daß

$$\bar{v}^{-1}(\bar{v}(x)) = x, \quad \bar{w}^{-1}(\bar{w}(x)) = x$$

wird; als Argument ist in (59a, b) v bzw. w zu nehmen. Die Konstantenwahl ist in (59a, b) von selbst richtig; wenn nämlich $v = \bar{v}$, $w = \bar{w}$ gesetzt wird, so kommt in (59a) rechts Null, in (59b) rechts ξx , wie es sein soll.

3. Im Fall $k = 4$ (d. h. $n = \frac{7}{5}$) wird man auf die Funktionen geführt (v, w haben die bisherige Bedeutung):

$$\lambda(x) = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[x \bar{v}^2 - \frac{1}{3} \int (\xi^2 - 3 \bar{\eta}^2) dx - 2 \bar{v} \int \bar{\eta} dx \right];$$

$$\mu(x) = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[x \bar{w}^2 - \frac{1}{3} \int (\xi^2 - 3 \bar{\eta}^2) dx + 2 \bar{w} \int \bar{\eta} dx \right];$$

und daraus:

$$\bar{v} = \bar{v}(x(\lambda)) \equiv g(\lambda); \quad \bar{w} = \bar{w}(x(\mu)) \equiv h(\mu);$$

dann kommt als Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\xi^3 t}{2} = g^{-1}(v) + h^{-1}(w) - \frac{3}{\xi} \left(\int_v^r g^{-1}(\alpha) d\alpha + \int_w^r h^{-1}(\alpha) d\alpha \right) \\ + \frac{3}{\xi^2} \left(\int_v^r \int_a^{\alpha} g^{-1}(\beta) d\beta d\alpha + \int_w^r \int_a^{\alpha} h^{-1}(\beta) d\beta d\alpha \right); \\ \xi^2 \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x - \sqrt{\frac{5}{2}} \eta t \right) = g^{-1}(v) - h^{-1}(w) \\ - \frac{1}{\xi} \cdot \left(\int_v^r g^{-1}(\alpha) d\alpha - \int_w^r h^{-1}(\alpha) d\alpha \right); \quad n = \frac{7}{5}. \end{array} \right.$$

Wenn g, h willkürlich gelassen werden, ist (60) das allgemeine Integral und stimmt mit (43c) überein. Eine Umrechnung nach Art der vorigen gibt beim Einsetzen von g^{-1}, h^{-1} als Analogon zu (59a, b):

$$(61 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\xi^5 t = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left[v^2 w^2 (\bar{v}^{-1}(v) - \bar{w}^{-1}(w)) \right. \\ \quad + \frac{(v^2 - 4v w + w^2)}{6} \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} (\bar{v}^2 - 4\bar{v}\bar{w} + \bar{w}^2) dx \\ \quad + v w (v - w) \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} (\bar{v} - \bar{w}) dx + (v - w) \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} \bar{v} \bar{w} (\bar{v} - \bar{w}) dx \\ \quad \left. + \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} \bar{v}^2 \bar{w}^2 dx \right]; \quad n = \frac{7}{5} \end{array} \right.$$

$$(61 \text{ b}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^3 \left(x - \sqrt{\frac{5}{2}} \eta t \right) = \frac{1}{8} \cdot \left[v^2 (v + 3w) \bar{v}^{-1}(v) + w^2 (w + 3v) \bar{w}^{-1}(w) \right. \\ \quad - \frac{(v - w)}{2} \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} (\bar{v}^2 - 4\bar{v}\bar{w} + \bar{w}^2) dx \\ \quad \left. - 3v w \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} (\bar{v} - \bar{w}) dx - \int_{\bar{w}^{-1}(w)}^{\bar{v}^{-1}(v)} \bar{v} \bar{w} (\bar{v} - \bar{w}) dx \right]; \quad n = \frac{7}{5} \end{array} \right.$$

Die Gl. (59a, b), (61a, b) entsprechen der Riemannschen Lösung der Anfangswertaufgabe für $n = \frac{5}{3}$ bzw. $\frac{7}{5}$ und lassen sich mit einiger Mühe in diese umrechnen. Wenn \bar{v}, \bar{w} willkürlich gelassen werden, hat man auch in diesen Gleichungen das allgemeine Integral vor sich. Es ist aber bedeutend unübersichtlicher als unsere Form (56) bzw. (60), oder die damit identische Form (43b) bzw. (43c). [Im Fall $n = 3$ ist die Umrechnung von (50a) oder (50b) auf Riemanns Lösung trivial.] Zur Untersuchung beliebig gewählter Lösungen sind daher (56), (60) oder (43b, c) vorzuziehen, für die Behandlung von Anfangswertaufgaben dagegen sind (59a, b), (61a, b) im allgemeinen zweckmäßiger.

4. Für ein erstes Beispiel (weitere im nächsten Paragraphen) wählen wir $k = 2$ und als Anfangsbedingung:

$$\xi = A; \quad \bar{\eta} = Bx;$$

A, B sind Konstante. Das Beispiel zeichnet sich durch mathematische Einfachheit aus; physikalisch ist es nur angenähert realisierbar. Es bedeutet für den Anfangszustand konstante Dichte, Strömungsgeschwindigkeit proportional der Entfernung von einem festen Punkt $x = 0$. Hier kann man auch das Verfahren von Gl. (52) bis (56) anwenden und findet der Reihe nach:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{Bx^2}{2} + Ax + \text{const} \right] = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{A}{B} \right)^2,$$

wenn

$$\int x \bar{\eta}_x dx = \frac{B}{2} \left(x^2 + \frac{A^2}{B^2} \right)$$

gesetzt wird;

$$\mu = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{A}{B} \right)^2;$$

$$g(\lambda) = \pm 2 \sqrt{B \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}}; \quad h(\mu) = \pm 2 \sqrt{B \mu \sqrt{\frac{2}{3}}};$$

$$H(\alpha) = \frac{a^2}{4B} \sqrt{\frac{3}{2}} = g^{-1}(\alpha) = h^{-1}(\alpha) = K(\alpha);$$

$$F(\alpha) = \frac{\frac{a^3}{3} + C}{4B} \sqrt{\frac{3}{2}} = G(\alpha);$$

C ist die nach Gl. (56) erwähnte Konstante, die geeignet zu wählen ist und die wir für F und G als gleich angenommen haben. Bildet man $F(\bar{v}) + G(\bar{w})$, so sieht man, daß $C = \frac{2A^3}{3}$ zu setzen ist, damit $\sqrt{\frac{3}{2}} \xi \int x \bar{\eta}_x dx$ herauskommt. Nach einfachen Rechnungen erhält man aus (56):

$$t = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{B} \left(\left(\frac{A}{\xi} \right)^3 - 1 \right); \quad x = \frac{\eta}{B} \cdot \left(\frac{A}{\xi} \right)^3.$$

Hier ist Auflösung nach ξ , η möglich und gibt nach Umrechnung auf ϱ , u :

$$\varrho = \left(\frac{A}{2 \sqrt{\frac{3}{2}} a} \right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} B t + 1}; \quad u = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} B x}{\sqrt{\frac{3}{2}} B t + 1}.$$

Ein anderer Weg zur letzten Gleichung ist die Anwendung von (59a, b).

Für $t = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{B}$ werden ϱ_t , u_t , u_x unendlich; ϱ_x zufällig nicht, weil x in ϱ gar nicht enthalten ist, ϱ_x also immer Null ist. Es handelt sich hier um einen der Ausnahmefälle, wo gleichzeitig der Zähler eines der Ausdrücke (19), hier von ξ_x , Null ist.

5. Die Bedingung des Unendlichwerdens von ξ , usw. (Zeitpunkt des Auftretens der Stoßwelle) läßt sich, für $k = 0$ in eine einfache Form bringen [vgl. (25)]:

$t = 2[\pm(\Phi'' - \Psi'') - \Phi' - \Psi']$ = entweder $-4G'$ oder $= -4F'$. Der Strich bedeutet, wie immer, Differentiation nach dem Argument. Man kann hier mit den anschaulich bequemeren Umkehrfunktionen rechnen. Zunächst folgt allgemein aus

$$F(\alpha) = \beta, \quad \alpha = F^{-1}(\beta)$$

die Beziehung zwischen den Differentialquotienten:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha}; \quad \frac{dF^{-1}(\beta)}{d\beta} = \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}},$$

also in unserem Fall $k = 0$:

$$t = \text{entweder } -\frac{4}{(G^{-1})'} \quad \text{oder} \quad = -\frac{4}{(F^{-1})'},$$

wobei rechts nach dem Argument von G^{-1} , F^{-1} zu differentieren ist.

Auch für $k = 2$ bekommt man noch verhältnismäßig einfache Formeln:

$$t = \text{entweder } -\frac{2}{3} \left(\frac{2F''}{\xi} - \frac{F' - G'}{\xi^2} \right) \quad \text{oder} \quad = -\frac{2}{3} \left(\frac{2G''}{\xi} + \frac{F' - G'}{\xi^2} \right).$$

§ 7. Beispiele

Wenn $n = 3$, hat die Lösung die einfache Gestalt (50a) oder (50b). Hier ist es leicht, Beispiele anzugeben und zu untersuchen.

1. Dichteschwankung in einem ruhenden Gas ($n = 3$)

Dann ist $\bar{u} = 0$; als Anfangsverteilung der Dichte nehmen wir:

$$(62) \quad a\bar{\varrho} = A + B e^{-\frac{x^2}{C^2}}.$$

Aus (50b) folgt mit der Abkürzung

$$(63) \quad V = a\varrho + u, \quad W = a\varrho - u$$

$\left(\text{es ist } \frac{v}{V^2} = V, \quad \frac{w}{V^2} = W \right)$ als Lösung für spätere Zeiten:

$$(64) \quad V = A + B \exp. \left[-\frac{(x - Vt)^2}{C^2} \right]; \quad W = A + B \exp. \left[-\frac{(x + Wt)^2}{C^2} \right].$$

Für V_x ergibt sich:

$$V_x = -\frac{2(V-A)(x-Vt)}{C^2 \left[1 - \frac{2t(V-A)(x-Vt)}{C^2} \right]};$$

V_x wird unendlich, wenn

$$x - Vt = \frac{C^2}{2t(V-A)};$$

dann ist aber: $V - A = B \exp\left(-\frac{C^2}{4t^2(V-A)^2}\right)$; setzt man $V - A = \tau$, so lautet die Bedingung: $\tau^2 \lg\left(\frac{t}{B}\right) = -\frac{C^2}{4t^2}$. Wir suchen den kleinsten Wert von t , der dieser Gleichung genügt; er gehört zum Minimum von $\tau^2 \lg\left(\frac{t}{B}\right)$. Dieses liegt bei: $\tau = \frac{B}{\sqrt{e}}$; dort hat $\tau^2 \lg\left(\frac{t}{B}\right)$ den Wert $-\frac{B^2}{2e}$, also ist

$$t = \pm \frac{C}{B} \sqrt{\frac{e}{2}};$$

t hängt von C/B , aber nicht von B/A ab (vgl. § 3). Wählen wir $C > 0$, was keine Einschränkung bedeutet, so ist für $B > 0$ das obere Vorzeichen zu nehmen, für $B < 0$ das untere. Wegen $V - A = \tau$ hat V an dieser Stelle den Wert:

$$V = A + \frac{B}{\sqrt{e}}.$$

Die Unstetigkeit tritt also dort auf, wo

$$\exp\left(-\frac{(x - Vt)^2}{C^2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6$$

geworden ist. Der zugehörige x -Wert ist:

$$\begin{aligned} \bar{x} = Vt + \frac{C^2}{2t(V-A)} &= \pm C \sqrt{2} \left(1 + \frac{A}{2B} \sqrt{e}\right) \\ &= \pm 1,41 C \left(1 + 0,82 \frac{A}{B}\right); \end{aligned}$$

das untere Vorzeichen gilt für $B < 0$.

Für W erhält man ebenso:

$$t = \pm \frac{C}{B} \sqrt{\frac{e}{2}}; \quad W = A + \frac{B}{\sqrt{e}}; \quad \bar{x} = \mp 1,41 C \left(1 + 0,82 \frac{A}{B}\right);$$

wobei wieder das untere Vorzeichen $B < 0$ entspricht.

In beiden Fällen ($B > 0$, $B < 0$) entsteht die Stoßwelle um so schneller, je schmäler die Störung (C klein) und je größer ihre Anfangsamplitude B war. Bei der Verdichtungswelle ($B > 0$) ist der Laufweg bis zur Ausbildung der Stoßwelle besonders klein, wenn $B \gg A$ (starke Störung). Die gesamte Breite des von der Störung erfassten Gebiets beträgt dann beim ersten Auftreten einer Unstetigkeit nicht ganz das Anderthalbfache der Anfangsbreite $2C$. Wenn aber $B \ll A$ (kleine Störung), ist der Laufweg groß gegen die Anfangsbreite. Bei der Verdünnungswelle ($B < 0$) muß $|B| < A$ sein (A ist natürlich immer > 0), weil sonst $\bar{q} < 0$ werden könnte. Starke Störung bedeutet hier $|B| \approx A$: auch hier ist der Laufweg bis zur Ausbildung der Stoßwelle bei starker Störung besonders klein.

Diese Ergebnisse haben, sinngemäß übertragen, allgemeine Bedeutung. Sie gelten nämlich auch für $n \neq 3$ von dem Zeitpunkt an, wo die v -, w -Wellen sich praktisch getrennt haben (vgl. § 3).

Auch die anderen Resultate des § 3 über die Ausbreitung der Störungen kann man hier am Beispiel leicht bestätigen:

Die Breite der Kurven V, W bleibt während der Bewegung — wir betrachten nur die Zeit bis zum Eintreten der Unstetigkeit — unverändert. Wenn $B > 0$, rückt in der V -Kurve der rechte Wendepunkt immer näher an das Maximum, während der linke sich immer mehr davon entfernt. Wenn $B < 0$, rückt der linke immer näher an das Minimum, der rechte entfernt sich immer mehr. [Die W -Kurve ist in x bei festem t das Spiegelbild der V -Kurve; denn Vertauschen von x mit $-x$ führt gemäß (64) V in W über.]

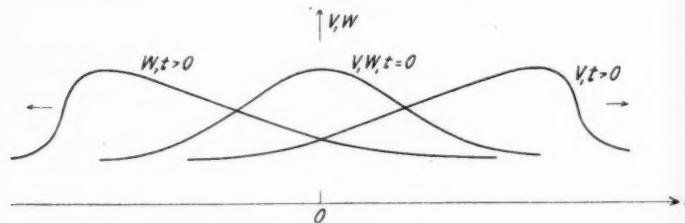


Abb. 1. Dichteschwankung im ruhenden Gas; Auseinanderlaufen und fortschreitende Verzerrung der V - und W -Wellen

Das Maximum $x = Vt$ von V bzw. $x = -Wt$ von W hat stets gleichbleibende Höhe, die bei V und W zufällig dieselbe ist ($A + B$); das Maximum wandert mit der konstanten Geschwindigkeit $\pm(A + B)$. Die V - und W -Welle deformieren sich, sie werden an der Front immer steiler, wenn $B > 0$; für $B < 0$ immer flacher. Je kleiner $|B|$ gegen A ist, desto länger dauert es, bis die beiden Wellen sich merklich in ihrer Gestalt ändern; dann kann nämlich im Exponenten bei nicht zu großem t für V, W der konstante Wert A eingesetzt werden. Da ϱ durch Addition aus V, W gebildet wird, so nimmt die Amplitude der Dichtestörung bei der Ausbreitung zunächst ab und wird konstant, sobald sich die V - und W -Welle nicht mehr merklich überlagern. In entsprechender Weise wächst die Geschwindigkeitsstörung u von Null auf ein Maximum an, das dann konstant bleibt.

Ein Zahlenbeispiel: Für $B = 10^5 \text{ cm/sec}$, $C = 5 \text{ cm}$ wird $t = 6 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$. Wenn $B > A$, bekommt man: $\tilde{x} = 7 \text{ cm}$. Wählt man aber $B < A$, so wird $x > C$; $B = \frac{A}{20}$ gibt $\tilde{x} \approx 1,2 \text{ m}$.

An der Stelle $x = 0$ ist nach (64) immer $V = W$, d. h. $u = 0$. Man kann sich also bei $x = 0$ eine feste Wand angebracht denken (weil die Randbedingung dann $u = 0$ für $x = 0$ lauten würde) und hat in (64) die Beschreibung der Ausbreitung einer Dichtestörung von einer festen Wand aus.

2. Reflexion einer Dichtestörung an einer festen Wand ($n = 3$)

Wir nehmen wieder $n = 3$ an. Das Anlaufen einer Dichtestörung gegen die feste Wand bei $x = 0$ erhalten wir mit dem Ansatz:

$$(65) \quad a \bar{\varrho} = A + B \left(\exp \left[\frac{-(x - \alpha)^2}{C^2} \right] + \exp \left[\frac{-(x + \alpha)^2}{C^2} \right] \right); \quad \bar{u} = 0;$$

wenn vorher Ruhe herrschte.

Für spätere Zeiten gilt dann:

$$(66) \quad \begin{cases} V = a \varrho + u = A + B \left(\exp \left[\frac{-(x - \alpha - Vt)^2}{C^2} \right] + \exp \left[\frac{-(x + \alpha - Vt)^2}{C^2} \right] \right); \\ W = a \varrho - u = A + B \left(\exp \left[\frac{-(x - \alpha + Wt)^2}{C^2} \right] + \exp \left[\frac{-(x + \alpha + Wt)^2}{C^2} \right] \right). \end{cases}$$

Wenn $x = 0$, stimmen die beiden Gleichungen für V, W formal überein, haben daher dieselben Funktionen von t als Lösung, wenigstens solange diese eindeutig sind (also vor dem Auftreten der Stoßwelle), und nur dieser Zeitbereich interessiert uns ja. Solange ist also sicher $u = 0$ bei $x = 0$.

Der Ansatz (65) bedeutet eine Art Spiegelung an der Wand $x = 0$, (die andere „Quelle“ liegt im unzugänglichen Gebiet). Die Sache ist aber darin anders als bei der gewöhnlichen Spiegelung, daß die beiden Quellen einander beeinflussen. Denn es kommt V, W im Exponenten der „Quellenfunktionen“ selbst vor! Die V -, W -Wellen dagegen überlagern sich, ohne sich zu stören. Die von $x = +\alpha$ kommende W -Welle läuft immer weiter nach links und verschwindet schließlich hinter der Wand $x = 0$, dafür erscheint die von $x = -\alpha$ kommende V -Welle, die nach rechts läuft. Sie stellt die reflektierte Welle dar. Nimmt man B hinreichend klein gegenüber A an, so kann man die Dichtestörung und das Hintereinanderherlaufen der direkten und der reflektierten Welle weitgehend durch (66) beschreiben, eben so lange, bis V_x, W_x unendlich werden.

Bei beliebiger Form der Dichteschwankung im anfangs ruhenden Gas vor einer festen Wand führt der Ansatz $a \bar{\varrho} = f(x - \alpha) + g(x + \alpha)$; $\bar{u} = 0$ zum Ziel. Für spätere Zeiten folgt zunächst:

$$V = f(x - \alpha - Vt) + g(x + \alpha - Vt); \quad W = f(x - \alpha + Wt) + g(x + \alpha + Wt).$$

Die Forderung $u = 0$ für $x = 0$ ist erfüllt, wenn $f(-\tau) = g(\tau)$. Die endgültige Lösung ist daher für $t = 0$:

$$(67) \quad a \bar{\varrho} = f(x - \alpha) + f(-x - \alpha); \quad \bar{u} = 0.$$

f ist aus der für $x \geq 0$ vorgegebenen Dichtevertteilung $F(x)$ so zu bestimmen, daß $f(x - \alpha) + f(-x - \alpha) = F(x)$ wird im Gebiet $x \geq 0$. Für $t > 0$ ist dann:

$$(68) \quad \begin{cases} V = f(x - \alpha - Vt) + f(-x - \alpha + Vt); \\ W = f(x - \alpha + Wt) + f(-x - \alpha - Wt). \end{cases}$$

Die Lösung (68) hat die Eigenschaft: $\varrho_x = 0$ für $x = 0$, wie man durch eine einfache Rechnung findet. Es sieht also zunächst so aus, als ob der Ansatz $f(-\tau) = g(\tau)$ eine Einschränkung der Allgemeinheit der Lösung mit sich gebracht hätte. Das ist nicht der Fall, denn es folgt allgemein aus (2) und (3), wenn an einer festen Stelle x ständig $u = 0$ sein soll: $p_x = 0$, $\varrho_x = 0$. Daraus folgt auch, daß bei stehenden Wellen Druck und Dichte an den Knoten der Geschwindigkeit dauernd ein Extremum hat, bei stehenden Wellen zwischen festen Wänden also auch an den Wänden.

In entsprechender Weise wie Dichtestörungen können Geschwindigkeitsstörungen behandelt werden.

3. Stehende Schwingungen ($n = 3$)

Im Fall $n = 3$ ist es auch leicht, Lösungen anzugeben, die stehende Wellen beschreiben. Gemäß (50b) ist die allgemeine Form von V, W :

$$V = f(x - Vt); \quad W = g(x + Wt);$$

die Forderung stehender Wellen zwischen festen Wänden bei $x = \pm \alpha$ bedeutet $u = 0$ bei $x = \pm \alpha$. $x = \alpha$ gibt $f(\alpha - Vt) = g(\alpha + Vt)$; d. h., da Vt beliebig ist:

$$(69) \quad f(-\tau) = g(+\tau + 2\alpha).$$

$x = -\alpha$ gibt $f(-\alpha - Vt) = g(-\alpha + Vt)$; also

$$f(-\tau) = g(+\tau - 2\alpha);$$

so folgt $g(\tau + 2\alpha) = g(\tau - 2\alpha)$, oder:

$$g(\tau) = g(\tau - 4\alpha);$$

g muß eine periodische Funktion mit der Periode 4α sein, also der doppelten Länge des Schwingungsgebiets. Ebenso schließt man auf:

$$f(\tau) = f(\tau - 4\alpha);$$

Die
f hängt mit g zusammen gemäß (69). Die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichungen kann leicht in Form von Fourierreihen angegeben werden und lautet (* bedeutet konjugiert komplex):

$$(70) \quad \left| \begin{array}{l} V = \sum_l A_l \exp \left[\frac{i l \pi}{2a} (x - V t) \right]; \\ W = \sum_l A_l (-)^l \exp \left[-\frac{i l \pi}{2a} (x + W t) \right] A_{-l} = A_l^*; \end{array} \right.$$

schreibt man $(-)^l = e^{\pm i \pi l}$, so ist sofort zu sehen, daß die Ausdrücke V, W für $x = \pm a$ formal übereinstimmen. (70) ist die allgemeinste stehende Welle zwischen festen Wänden ($\pm a$), wenn $n = 3$.

Ein Beispiel: Wir setzen $\alpha = \pi$ und nehmen an, daß nur A_0, A_2 von Null verschieden seien. Dann ergibt sich aus (70) als spezielle stehende Welle, wenn A_2 als reell angenommen wird:

$$(71) \quad V = A + B \cos(x - V t); \quad W = A + B \cos(x + W t);$$

d. h.:

$$(72) \quad a \varrho = A + B \cos(x - ut) \cos a \varrho t; \quad u = B \sin(x - ut) \sin a \varrho t.$$

Wenn $|B| \ll |A|$ und t nicht zu groß, folgt aus (72) die gewöhnliche stehende Welle

$$a \varrho = A + B \cos x \cos At; \quad u = B \sin x \sin At,$$

die sich unverändert erhalten würde. (Unsere Lösung entspricht offenbar dem ersten Oberton des Schwingungsbereiches.) Solange $|B| \ll |A|$, sorgt auch wirklich die Reibung dafür, daß die nach (72) zu erwartende zeitliche Veränderung der stehenden Welle nicht beobachtbar wird, weil die Welle vorher erlischt. Wenn aber $|B|$ nicht sehr klein gegen $|A|$ ist, sind die Gl. (72) zuständig, die wie jede Lösung von (2), (3) eine mit der Zeit zunehmende Verzerrung der Wellenform liefern. Die Wellenfront wird schließlich beliebig steil, es entsteht eine stehende Stoßwelle.

Die Ausbildung dieser Wellenform wird in den folgenden Abbildungen gezeigt, für die $B = 0,1 A$ gesetzt ist; aufgetragen ist in Abb. 2 V/A , in Abb. 3 W/A , für verschiedene Werte von t . Das Zustandekommen der Wellenformen kann man sich so vorstellen, daß man die V -, W -Wellen als unendlich ausgedehnt ansieht; dann wandern die V -Wellen immer nach rechts und werden dabei an ihrer Front ständig steiler, immer neue Maxima, die steiler sind als ihre Vorgänger, treten in den Bereich von $-\pi$ bis $+\pi$ ein. Die W -Wellen laufen nach links. Die Maxima wandern mit der konstanten Geschwindigkeit $1,1 A$; die Zeit für einen Hin- und Hergang des Maximums ist daher $\frac{2\pi}{1,1 A} = \frac{5,71}{A}$. Zwischen $t = \frac{1}{A}$ und $t = \frac{4}{A}$

liegt also ungefähr ein halber Hin- und Hergang des Maximums, zwischen $t = \frac{4}{A}$ und $t = \frac{99}{A}$ recht genau ein ganzer Hin- und

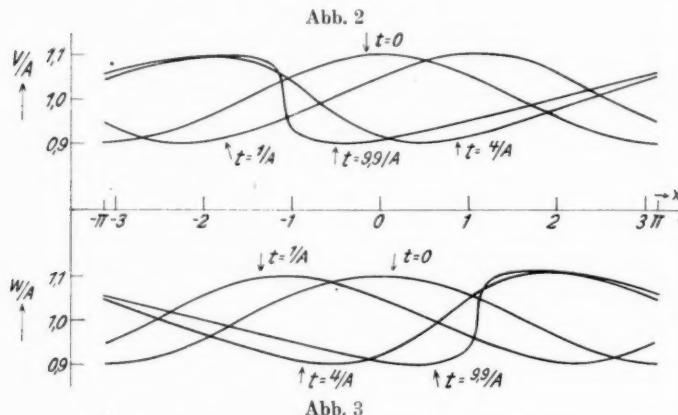


Abb. 2 und 3. Zeitliche Entwicklung einer stehenden Schwingung zwischen festen Wänden (bei $x = \pm \pi$); erster Oberton, $n = 3$. Obere Hälfte (Abb. 2) V-Welle, untere Hälfte (Abb. 3) W-Welle

Abb. 4

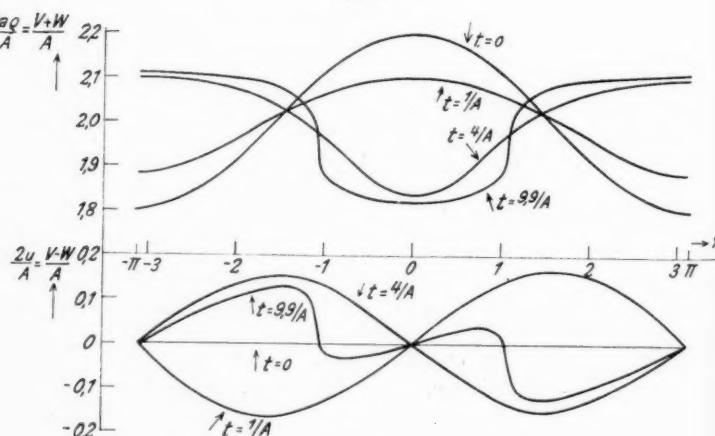


Abb. 5

Abb. 4 und 5. Die Überlagerung der Kurven von Abb. 2 und 3; oben (Abb. 4) Addition, die dargestellten Funktionen sind proportional der Dichte; unten (Abb. 5) Subtraktion, die Funktionen sind proportional der Strömungsgeschwindigkeit

Hergang; deshalb fallen die Maxima von V/A , W/A bei diesen Kurven so nahe zusammen. Die zugehörigen Minima fallen nicht aufeinander, weil die Welle sich deformiert; sie laufen zwar auch mit konstanter Geschwindigkeit, aber mit einer andern, nämlich $0,9 A$.

Für $t = \frac{10}{A}$ wird die Wellenfront unendlich steil, tritt die Stoßwelle auf. Wählen wir statt (71) eine Schwingung mit $\cos \frac{l\pi}{2a} \cdot (\)$

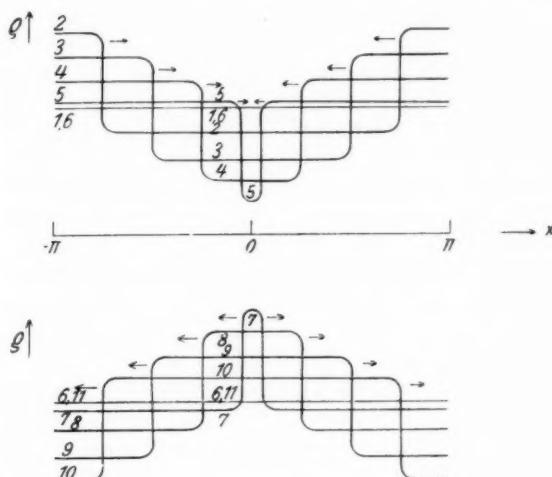


Abb. 6. Stehende Schwingung zwischen festen Wänden (bei $x = \pm \pi$): erster Oberton, $n = 3$. Die Stoßwelle der Dichte; die Kurven sind in ihrer zeitlichen Reihenfolge numeriert, Pfeile geben die Laufrichtung der Welle an

oder $\sin \frac{l\pi}{2a} \cdot (\)$, so kommt als Zeitpunkt des Auftretens der Stoßwelle (von $t = 0$ aus gerechnet):

$$t = \pm \frac{2a}{l\pi B}; \text{ (unteres Vorzeichen gehört zu } B < 0\text{).}$$

Diese Formel entspricht dem $t = \pm \frac{c}{B} \cdot \sqrt{\frac{e}{2}}$ von Beispiel 1; $2a/l$ mißt hier sozusagen die Breite der Störung, je größer $l/2a$, desto schmäler ist sie. In Abb. 4 und 5 sind die Überlagerungen der Kurven von Abb. 2 und 3 gezeichnet: $2a\rho/A$ in Abb. 4 und $2u/A$ in 5. Die Funktion (72) ist auch darin speziell gewählt, daß sie $u \equiv 0$ gilt für $t = 0$.

Die schematische Abb. 6 soll zeigen, wie die Stoßwelle der Dichte weiterlaufen wird; auch an dieser Abbildung erkennt man,

daß es sich um den ersten Oberton handelt, beim Grundton wäre immer nur eine Stoßwelle im Schwingungsbereich. Für die Zeichnung ist angenommen, daß die V - und W -Wellen sich allmählich der eckigen Form langsam ansteigen und sehr steilen Abfalls annähern, die in Abb. 2 und 3 bei $t = \frac{9,9}{A}$ bereits angedeutet ist. Die Kurven sind in ihrer zeitlichen Reihenfolge numeriert; die Pfeile geben die Laufrichtung der Dichtewelle an.

Eine strenge Behandlung des Übergangs der Welle in die Stoßwelle endlicher Steilheit ist theoretisch noch nicht gegeben worden; sie würde Berücksichtigung der Reibung und Wärmeleitung in den Bewegungsgleichungen verlangen. Nach einiger Zeit wird die Welle stationär werden in der Weise, daß sie ihre endliche Steilheit beibehält. Über die weitere Bewegung geben die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Energie für viele Fragen ausreichende Auskunft. Wir beschränken uns hier aber auf den Zeitraum vor dem Auftreten der Stoßwelle.

Stehende Wellen zwischen festen Wänden für beliebige $n = \frac{(2m+3)}{(2m+1)}$ werden in § 8 behandelt.

4. Ausbreitung einer Dichtefront in einem Gas $\left(n = \frac{5}{3}\right)$

Ein weiteres Beispiel zum Fall $n = \frac{5}{3}$: Der Ansatz

$$(73) \quad \xi = A + B \operatorname{Tg} \left(\frac{x}{C} \right); \quad \bar{\eta} = 0;$$

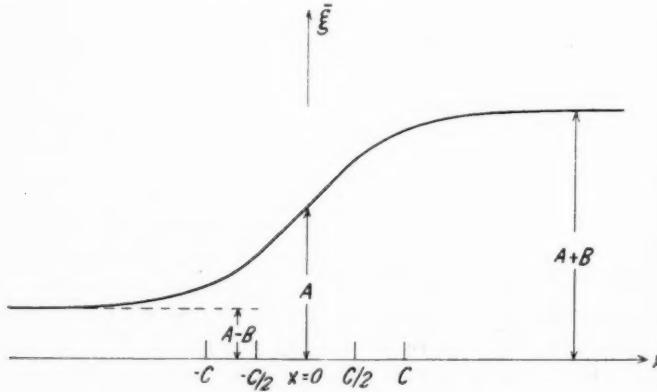


Abb. 7. Dichtefront

beschreibt eine Dichtefront (Abb. 7). Je kleiner C , desto steiler ist der Dichteabfall. Wir nehmen $C > 0$ an (Dichteanstieg gegen $x > 0$).

hin), aus physikalischen Gründen muß $A > B$ sein. Ist der Vorgang adiabatisch, so gilt die folgende Rechnung für alle Gase, welche $x = \frac{5}{3}$ haben.

Es ist

$$\bar{v}(x) = \bar{w}(x) = \xi; \quad \bar{v}^{-1}(\alpha) = \bar{w}^{-1}(\alpha) = C \operatorname{Arctg} \frac{u - A}{B} = \frac{C}{2} \lg \left(\frac{B - A + u}{B + A - u} \right);$$

[beachte, daß $\bar{v} \bar{v}^{-1}(x) \equiv x$ sein soll!] Nach elementaren Rechnungen kommt aus (59a, b):

$$(74) \quad \begin{cases} \exp \left[- \frac{(v+w)^2 t}{2C} \sqrt{\frac{2}{3}} \right] = \left(\frac{B - A + v}{B - A + w} \right)^{(A - B)^2 + v w} \\ \quad \cdot \left(\frac{B + A - w}{B + A - v} \right)^{(A + B)^2 + v w} \cdot \exp[-2B(v - u)]; \\ \exp \left[\frac{2(v+w)}{C} \left(x - \frac{(v-w)}{2} t \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right] = \left(\frac{B - A + v}{B + A - v} \right)^v \cdot \left(\frac{B - A + w}{B + A - w} \right)^w, \end{cases}$$

als Lösung der Aufgabe.

§ 8. Stehende Schwingungen zwischen festen Wänden

$$\text{für } n = \frac{(2m+3)}{(2m+1)}, \quad m \text{ ganz, } \geq 0$$

Auch für $n = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots$ allgemein: $n = \frac{(2m+3)}{(2m+1)}$ kann man die allgemeinste Form stehender Schwingungen zwischen festen Wänden (bei $x = \pm \alpha$) angeben.

Die Gl. (15) läßt sich mit Hilfe von (42) wegen (39) allgemein umschreiben in:

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta t}{n-1} = \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^m (F(v) - G(w)); \\ -\frac{\xi t}{2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \right)^m (F(v) + G(w)); \quad m = \frac{k}{2} = \frac{3-n}{2(n-1)}, \text{ ganz, } \geq 0. \end{cases}$$

Die Randbedingung verlangt, daß $v = w$ für $x = \pm \alpha$; das bedeutet:

$$(75a) \quad \pm \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} = \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d \xi} \right)^m (F(\xi) - G(\xi)).$$

Das muß eine Identität in ξ werden, weil ξ natürlich nicht zeitlich konstant ist an der Wand; die andere Gl. (75) gibt dann das zeitliche Verhalten von ξ an der Wand. Setzt man zur Abkürzung:

$$(76) \quad \left(\frac{1}{\tau} \frac{d}{d \tau} \right)^m F(\tau) \equiv \varphi^{-1}(\tau); \quad \left(\frac{1}{\tau} \frac{d}{d \tau} \right)^m G(\tau) = \psi^{-1}(\tau);$$

so erhält man aus (75a) die einfache Bedingung:

$$\pm \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} = \varphi^{-1}(\xi) - \psi^{-1}(\xi),$$

oder ausgeschrieben nach „Umkehrung“ von φ^{-1} :

$$\text{bei } x = +\alpha: \varphi \left[\psi^{-1}(\xi) + \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \right] = \xi;$$

$$\text{bei } x = -\alpha: \varphi \left[\psi^{-1}(\xi) - \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \right] = \xi;$$

was gleichbedeutend ist mit:

$$\varphi \left(\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \right) = \psi(\tau); \quad \varphi \left(\tau - \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \right) = \psi(\tau);$$

dies sind aber mit geringer Änderung in der Bezeichnung dieselben Gleichungen wie im Fall $n = 3$ (§ 7, Beispiel 3). Es folgt:

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\tau) = \sum_l A_l \exp \left[\frac{i \pi l \sqrt{n-1}}{\alpha} \tau \right]; \\ \psi(\tau) = \sum_l A_l (-)^l \exp \left[\frac{i \pi l \sqrt{n-1}}{\alpha} \tau \right]; \quad A_{-l} = A_l^*. \end{array} \right.$$

Aus (77) sind mit Hilfe von (76) F, G zu berechnen; Einsetzen in (75) gibt schließlich die gesuchte allgemeine Darstellung stehender Wellen für $k = 2m$. Wenn $m = 0$, bekommt man aus (75)–(77) wieder die Lösung (70), wie es sich gehört.

Zur Erläuterung gebe ich die Grundschwingung ($l = 1$) für $n = \frac{5}{3}$ an. Dann ist A_0, A_1 von Null verschieden; A_0 deswegen, weil sonst φ Null werden könnte. Man findet:

$$\varphi(\tau) = A + B \cos \left(\frac{\pi \tau}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{3}} \right); \quad \psi(\tau) = A - B \cos \left(\frac{\pi \tau}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{3}} \right);$$

$$\varphi^{-1}(\tau) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \arccos \left(\frac{\tau - A}{B} \right); \quad \psi^{-1}(\tau) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \arccos \left(\frac{A - \tau}{B} \right);$$

$$F(v) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \int v \arccos \left(\frac{v - A}{B} \right) dv;$$

$$G(w) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \int w \arccos \left(\frac{A - w}{B} \right) dw;$$

und schließlich:

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\pi} \xi \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}} \eta t \right) = v \arccos \left(\frac{v - A}{B} \right) - w \arccos \left(\frac{A - w}{B} \right); \\ - \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi^2 t}{2} = \xi \left(v \arccos \left(\frac{v - A}{B} \right) + w \arccos \left(\frac{A - w}{B} \right) \right) \\ \quad - \int v \arccos \left(\frac{v - A}{B} \right) dv - \int w \arccos \left(\frac{A - w}{B} \right) dw. \end{array} \right.$$

Die Integrale können elementar ausgewertet und die Formeln nach $\arccos\left(\frac{v-A}{B}\right)$, $\arccos\left(\frac{A-w}{B}\right)$ aufgelöst werden; durch Umkehrung schafft man dann die mehrdeutigen arccos weg. Man erhält so Endformeln von der Gestalt:

$$v = A + B \cos(\lambda_1 t + \delta_1); \quad w = A + B \cos(\lambda_2 t + \delta_2).$$

Die λ_i sind eindeutige Funktionen von v, w , die δ_i solche von v, w, x ; es hat wohl kein Interesse, sie ausführlich hin zu schreiben.

Eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse steht am Kopf der Arbeit, eine ausführlichere in § 1.

Gießen, Institut für theoretische Physik, 22. Dezember 1939.

(Eingegangen 23. Dezember 1939)

**Über den Mechanismus der Zündung
langer Entladungsrohre. II**
Beeinflussung der Zündung durch Vorionisation
Von W. Bartholomeyczik und E. Wolter

(Mit 11 Abbildungen)

Einleitung

Die Zündspannungssenkung von Funken- und Glimmentladungen durch Bestrahlung ist in einer Reihe von Arbeiten¹⁾ experimentell und theoretisch behandelt worden. Dagegen sind systematische Untersuchungen bei stärkerer Vorionisation mittels Hilfsentladungen unseres Wissens nur von Deimel²⁾, und zwar für den Fall der kurzen Glimmentladung durchgeführt worden. Er fand, daß mit wachsender Vorerregung die Zündspannung absinkt und daß die Vorstromcharakteristik sich dabei zu höheren Stromstärken verschiebt. Der Zündstrom, d. h. der Vorstrom kurz vor der Zündung, steigt bereits bei verhältnismäßig niedrigen Vorerregungen stark an.

Deimels Arbeit behandelt den Fall der durch Wände nicht beeinflußten Entladung. Für den Fall der Zündung langer Entladungsrohre (Säulenzündung) ist wegen der Trägerverluste an der Rohrwand von vornherein nicht zu sagen, ob diese Ergebnisse übertragen werden können, zumal der eine von uns³⁾ für den Zündmechanismus einer derartigen Entladungsstrecke einen komplizierteren Mechanismus aufgedeckt hat. Der Anschluß an die theoretischen Überlegungen Steenbecks und Mierdels⁴⁾ über den Raumladungskippmechanismus konnte experimentell noch nicht durchgeführt werden, da sich ein stark inhomogenes Zündfeld ergeben hatte; bei starker Vorionisation ist zu erwarten, daß das inhomogene Längsfeld homogenisiert wird, so daß wir uns den Voraussetzungen der Steenbeck-Mierdelschen Theorie nähern würden. Infolge der

1) Vgl. W. Rogowski u. A. Wallraff, *Ztschr. f. Phys.* **108**, S. 1. 1938 und die dort zitierte Literatur über Zündspannungsabsenkung.

2) C. Deimel, *Phys. Ztschr.* **37**, S. 610. 1936.

3) W. Bartholomeyczik, *Ann. d. Phys.* [5] **36**, S. 485. 1939, im folgenden als I zitiert.

4) M. Steenbeck, *Wiss. Veröff. d. Siemenskonzerns* **15**, S. 32. 1937; M. Steenbeck u. G. Mierdel, *Ztschr. f. Phys.* **106**, S. 311. 1937; G. Mierdel, *Wiss. Veröff. d. Siemenskonzerns* **18**, S. 293. 1939.

Zeitverhältnisse konnten die zu diesem Zweck geplanten oszillographischen Versuche nicht durchgeführt werden. Es ist jedoch durch unsere mittels einfacherer Versuchsmethoden erzielten Ergebnisse ein gewisser Abschluß erreicht worden, worüber im folgenden berichtet wird.

Methodik

Da wegen der Länge der Entladungsrohre¹⁾ die Form der Elektroden auf Zündspannung und Zündmechanismus keinen wesentlichen Einfluß hat, kann die Vorionisation mit einfachsten Mitteln erzeugt werden. Wir benutzen daher meistens ein Rohr, das an einem Ende eine Kugel von 8 cm Durchmesser mit 2 Wendelektroden im Abstand 1 cm trug. Die vorionisierende Hilfsentladung konnte je nach der Heizung einer Wendel mit recht verschiedener Brennspannung als Glimm- oder Bogentladung oder als Niedervoltbogen brennen. Benutzt wurde zur Zündspannungsmessung eine Kippsschaltung mit geringer Gleitgeschwindigkeit (30 Volt/sec). Gemessen wurde als Zündspannung die im Augenblick der Zündung zwischen den Punkten größten Potentialunterschieds liegende Spannung. Man begeht dabei einen Fehler, der besonders bei kathodischer Zündung in gewissen Fällen beträchtlich werden könnte. Da nämlich die Zündung vermutlich aus dem Plasma der Hilfsentladung in der Nähe des Ansatzzrohres erfolgt, dessen Potential nur wenig tiefer als das Anodenpotential liegt, mißt man bei kathodischer Hilfszündung die Brennspannung der Hilfsentladung mit²⁾. Bei der vornehmlich benutzten starken Heizung der Hilfskathode war es im allgemeinen nicht nötig, diesen Fehler zu berücksichtigen.

Als erschwerend bei den Messungen erwies sich bei höherem Druck die Instabilität des Niedervoltbogens, auf die Funk und Seeliger hingewiesen haben³⁾, da je nach dem Brennzustand des Niedervoltbogens die für die Vorerregung maßgebliche Trägerdichte an der Rohransatzstelle beträchtlich schwankt. Als Maß für die Stärke der Vorerregung haben wir die Stromstärke der Hilfsentladung benutzt, weil die Bestimmung der Trägerdichte an der Rohransatzstelle mit Sonden bei unseren orientierenden Versuchen eine überflüssige Komplikation der Versuchsanordnung bedingt hätte. Im übrigen kann auf Grund der über Niedervoltbogen bekannten Tatsachen angenommen werden, daß wenigstens für den Fall des stabilen Brennzustandes die Trägerdichte an der Rohransatzstelle annähernd der Stromstärke proportional ist. Alle Versuche wurden in Neon angestellt.

Zündkennlinien

In Abb. 1 ist für 5 Torr die Abhängigkeit der prozentualen Zündspannungssenkung für anodische und kathodische Hilfszündung

1) R. Seeliger u. K. Bock, Ztschr. f. Phys. **110**, S. 717. 1939.

2) Versuche mit stark verschiedenen Charakteristiken (die durch verschiedene Heizung der Hilfskathode eingestellt wurden) zeigten, daß die Differenz der Zündspannung und der Brennspannung der Hilfsentladung innerhalb der Meßfehler konstant ist. Durch den bei diesen Versuchen benutzten tiefen Druck war die Störung durch die Instabilität der Hilfsentladung ausgeschlossen, die weiter unten besprochen wird. Vgl. G. Mierdel, a. a. O.

3) R. Seeliger u. W. Funk, Ztschr. f. Phys. **113**, S. 205. 1939.

von der Hilfsstromstärke dargestellt. Mit wachsender Hilfsstromstärke nimmt die Zündspannungs senkung zu und nähert sich

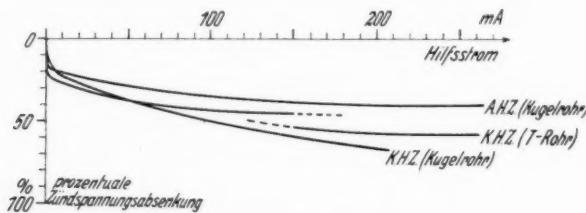


Abb. 1. Prozentuale Zündspannungssenkung.

(Kugelrohr: Kugeldurchmesser 8 cm, Wendelabstand 1 cm, Rohrweite 2 cm, Elektrodenabstand 50 cm, Neon 5 Torr. T-Rohr: T-Ansatzstück 2,2 cm Durchmesser, sonst wie Kugelrohr)

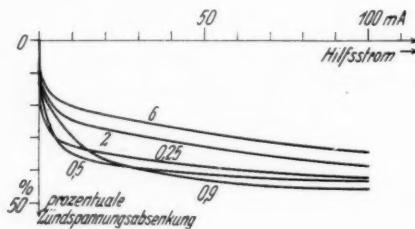


Abb. 2

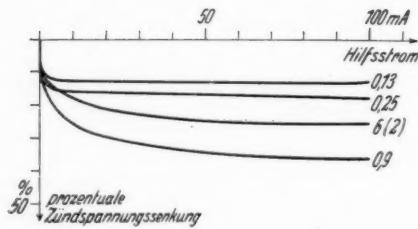


Abb. 3

Abb. 2 und 3. Prozentuale Zündspannungssenkung.
(Kugelrohr, Druck als Parameter.)

Abb. 2: Kathodische Hilfszündung, Abb. 3: Anodische Hilfszündung

einem „Sättigungswert“. Mit eingezzeichnet ist die kathodische Zündspannungssenkung für ein Rohr, bei dem das Hilfselektroden system in einem T-förmigen Ansatzstück angebracht ist; bei dieser Anordnung

wird der Sättigungswert früher erreicht¹⁾. Obwohl der Absolutbetrag bei anodischer Hilfszündung nur 40 % gegenüber 70 % bei katho-

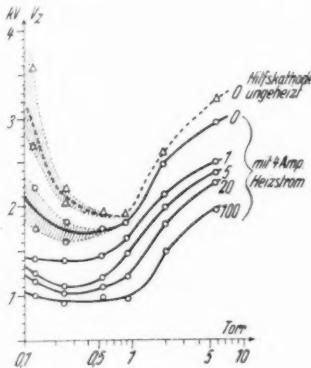


Abb. 4

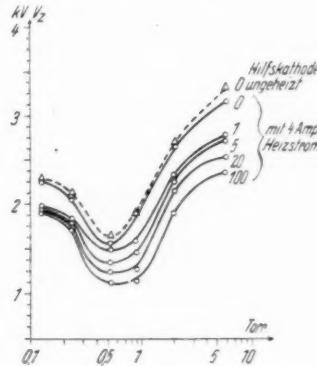


Abb. 5

Abb. 4 und 5. Zündspannung in Abhängigkeit vom Druck.
(Kugelrohr, Hilfsstrom als Parameter.)

Abb. 4: Kathodische Hilfszündung, Abb. 5: Anodische Hilfszündung

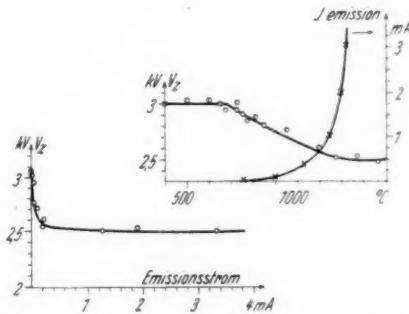


Abb. 6. Zündspannungssenkung bei Elektronenemission einer Wendel.
(Kugelrohr, Neon 5 Torr)

discher Hilfszündung beträgt, wird der Sättigungswert früher erreicht. Mit abnehmendem Druck tritt die Sättigung wesentlich früher ein²⁾.

1) Bei 150 mA zeigt sich bei dieser Anordnung ein Umspringen des Niedervoltbogens zwischen 2 Brennzuständen, zu denen je eine Zündspannungsabsenkung gehört.

2) Bei der kathodischen Hilfszündung ist bis zu den benutzten größten Hilfsstromstärken bei dem Druck von 6 und 2 Torr noch keine Andeutung einer Sättigung zu bemerken.

(vgl. Abb. 2 und 3). In den Abb. 4 und 5 ist die Hilfsstromstärke Parameter. Es ergibt sich ein Minimum der Zündspannung praktisch unabhängig von der Hilfsstromstärke etwa bei 0,5 Torr für anodische und 0,3 Torr für kathodische Hilfszündung. Bemerkenswert ist, daß nur bei kathodischer Zündung die Steilheit des Anstiegs der Zündspannung mit abnehmendem Druck unterhalb des Minimums von der Stärke der Vorerregung der Hilfselektrode abhängt.

Der Einfluß der Elektronenemission der Wendel auf die Zündspannung konnte durch pyrometrischen Vergleich der Wendeltemperatur bei gasgefülltem und evakuiertem Rohr (wenn auch mit nur gewissen Unsicherheiten¹⁾) untersucht werden. Nicht die Temperatur an sich — dann wäre der Effekt lediglich ein Druckeffekt — ist für die Zündspannungsabsenkung verantwortlich, sondern die Zündspannungsabsenkung beginnt erst mit dem Einsatz einer merklichen Elektronenemission²⁾ (vgl. Abb. 6; bei anodischer Zündung war ein derartiger Einfluß nicht nachweisbar). Der Betrag der maximalen Zündspannungsabsenkung ist von der Größenordnung der in I definierten Einsatzspannung.

Wir haben daher versucht, durch Beeinflussung des Zündvorgangs mittels Schellen auf der Rohrwand den Zusammenhang mit den Ergebnissen in I besonders über die V -Kurve herzustellen. Bei noch so hoher Elektronenemission wurde stets bei Verschiebung der Schelle die V -Kurve erhalten; sie verlagert sich lediglich mit wachsender Elektronenemission parallel zur V -Achse nach unten. Dagegen konnte auch bei beliebig kleiner Hilfsstromstärke kein Einfluß der Schellenstellung auf die Zündspannung festgestellt werden³⁾! Aus diesen Ergebnissen geht hervor, daß der Mechanismus bei Hilfs-

1) Die Unsicherheiten bei diesen Messungen beruhen einerseits darauf, daß die Temperaturen wegen eines allmählich zunehmenden Rohrbeschlagens vom verdampften Wendelmaterial zu klein gemessen wurden. (Dieser Fehler würde in Abb. 6 bedeuten, daß die Kurve für V_z in Richtung größerer Temperatur zu verschieben wäre). Bei Versuchsreihen mit verschiedenem Beschlagszustand trat zwar immer der gleiche prinzipielle Kurvenverlauf auf, jedoch sank die maximale Zündspannungsabsenkung mit zunehmender Beschlagsdicke (bei fast undurchsichtigem beschlagenem Rohr z. B. auf rund 200 Volt). Dies ist andererseits ein Zeichen dafür, daß, wie auch von vornherein zu erwarten ist, die Einsatzspannung noch wesentlich auch von der Wandbeschaffenheit abhängt.

2) G. Mierdel, a. a. O., der diesen Effekt ebenfalls beobachtet hat, ist auch zum Schluß gekommen, daß es sich nicht allein um einen Druckeffekt handelt.

3) Allerdings ist eine kapazitive Wirkung beim Nähern der Schelle oder der Hand durch gelegentliche Zündung unterhalb der Zündspannung zu beobachten.

zündung von dem bei „nicht vorerregten“ Elektroden verschieden ist. Bei den untersuchten Fällen, a) kathodische Hilfszündung, 1. Anode geerdet, 2. Kathode geerdet; b) anodische Hilfszündung, 1. Kathode geerdet, 2. Anode geerdet, ergaben sich stets innerhalb der Fehlergrenzen für a) 1, 2 einerseits und für b) 1, 2 andererseits jeweils dieselben Zündkennlinien.

Dies gilt allerdings nur für den Fall der langsamen Gleitzündung. Stoßzündversuche wurden auf 2 Arten durchgeführt: in Methode I wurde durch Betätigung eines Schalters die Hilfsentladung gezündet und zugleich die Spannung an das Rohr gelegt, während bei Methode II bei bereits brennender Hilfsentladung die Rohrspannung angelegt wurde. Die hierbei auftretenden Verhältnisse sind derartig kompliziert, daß wir uns auf wenige Punkte und auf kathodische Hilfszündung beschränken müssen. Methode I und II geben verschiedene Zündspannungen; bei Kathode geerdet liegen die I-Werte tiefer,

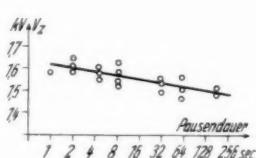


Abb. 7

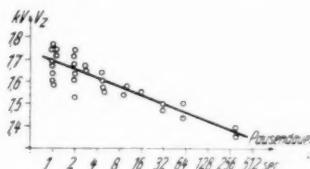


Abb. 8

Abb. 7 und 8. Kathodische Hilfszündung.
(Kugelrohr, Neon 6 Torr. Heizstrom der Hilfskathode 3,85 Amp.,
Hilfsstrom 140 mA, Hilfsspannung 20 Volt.)

Abb. 7: Anode geerdet, Abb. 8: Kathode geerdet

bei Anode geerdet machen starke Streuungen eine eindeutige Aussage unmöglich. Im Fall II ergeben sich bei beiden Erdungsarten beträchtliche Unterschiede, je nachdem das Herantasten an die Zündspannung von höheren („Abwärtsgang“) oder tieferen („Aufwärtsgang“) Spannungen aus erfolgt. Beim Aufwärtsgang streuen die Meßwerte stark und liegen für K geerdet im Mittel 150 Volt höher als bei A geerdet. Beim Abwärtsgang sinkt mit wachsender Pausendauer zwischen den Zündversuchen (besonders bei K geerdet) die Zündspannung ab [Abb. 7 und 8)]. Den Schlüssel zum Verständnis dieser Ergebnisse gab die Beobachtung der in I näher beschriebenen Zündwolke beim Einschalten einer unterhalb der Zündspannung liegenden Rohrspannung, wenn nur die Versuchspause hinreichend groß war: Durch die brennende Hilfsentladung erfolgt eine allmähliche Reinigung des Rohres, und wir können die mit wachsender Pausendauer abnehmende Zündspannung aus den in I diskutierten Vorstellungen verstehen.

1) Bei A geerdet ist die Absenkung geringer und teilweise durch starke Streuungen überdeckt. Anodische Hilfszündung ergibt innerhalb erheblicher Streuungen ähnliche Ergebnisse.

Vorstromcharakteristiken und Zündgrenzkurve

Bei höheren Rohrspannungen beobachtet man vor der Zündung an der nicht vorerregten Elektrode ein Glimmen¹⁾, das mit wachsender Rohrspaltung sich zur aktivierte Elektrode ausdehnt und meistens aus einzelnen Schichten besteht. Diese Glimmerscheinung verläuft in allen vier untersuchten Fällen a) 1, 2; b) 1, 2 vollkommen gleichartig. Wegen der Überstrahlung durch die brennende Hilfsentladung kann die Reichweite dieses Glimmens nicht festgestellt werden; immerhin ist zu schließen, daß vor der Zündung ein beträchtlicher Vorstrom fließen muß.

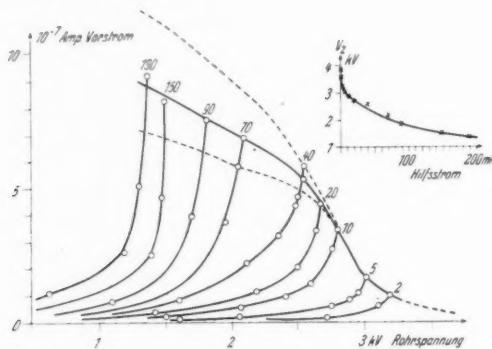


Abb. 9

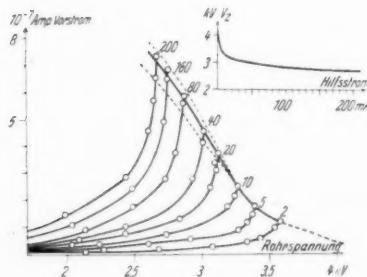


Abb. 10

Abb. 9 und 10. Vorstromcharakteristiken und Zündgrenzkurve.

(Kugelrohr, Neon 6 Torr, Heizstrom 4 Amp.)

Abb. 9: Kathodische Hilfszündung, Abb. 10: Anodische Hilfszündung

Während bei nicht vorerregten Zündelektroden in Teil I noch keine Vorstromcharakteristik erhalten werden konnte, haben wir sowohl für kathodische als auch für anodische Hilfsregung in Ab-

1) Vgl. zur Deutung dieser Erscheinung die Messungen über die Feldverteilung.

hängigkeit von der Hilfsregung eine Schar von Kennlinien jeweils bis zum Zündpunkt aufnehmen können. Das benutzte empfindliche Spiegelgalvanometer (aperiodische Schaltung) wurde durch eine Ventilröhre und eine große Selbstinduktion im Galvanometerkreis vor Überbelastung geschützt. Bei der Zündung konnte sich lediglich die Elektrodenkapazität und die Kapazität des statischen, zur Spannungsmessung benutzten Voltmeters über das Galvanometer entladen. Die Zündpunkte streuen bei höheren Hilfsregungen 1. weil die Maschinenspannung trotz Glättungskondensatoren schwankt und 2. wegen der Instabilität des Niedervoltbogens. Zündgrenzkurven¹⁾ sind unseres Wissens für den Fall der Zündung langer Entladungsrohre noch nicht bestimmt worden und wir wollen daher die Meßergebnisse trotz der erwähnten Unsicherheiten mitteilen (Abb. 9 und 10). Prinzipielle Unterschiede im Verlauf der Vorstromcharakteristiken zwischen anodischer und kathodischer Hilfszündung bestehen nicht, obwohl der anodische Vorstrom erst mit höheren Rohrspannungen merklich einsetzt. In beiden Fällen wachsen die Zündstromstärken mit zunehmender Hilfsregungstromstärke. Die Zündstromstärken selbst sind für anodische und kathodische Zündung bei gleichen Hilfsregungen nur wenig verschieden, dagegen verläuft die Zündgrenzkurve für anodische Zündung in ihrem oberen Teil steiler. Wie die Abbildungen zeigen, ist also für die Zündung sicher nicht einfach erforderlich, daß der Vorstrom einen bestimmten kritischen Wert überschreitet.

Sondenmessungen zur Feldverteilung

Zur Messung der Veränderung des Zündfeldes durch die Vorerregung haben wir ein Rohr mit 9 Sonden im Abstand von 10 cm, der Rohrlänge 100 cm und der Weite 2 cm benutzt. Das Hilfselektrondensystem war in einer Kugel von 8 cm Durchmesser angebracht. Diese Anordnung hat den Nachteil, daß für die vorerregte Elektrode kein fester Potentialbezugspunkt definiert ist (vgl. dazu das auf S. 125 über die Fehler bei der Zündspannungsmessung Gesagte). Um saubere Verhältnisse zu erzielen, müßte man das Hilfssystem von dem Rohr durch ein Gitter trennen und das Gitterpotential als Potentialbezugspunkt wählen. Unsere einfache Anordnung ergab bereits wertvolle Aufschlüsse. (Zur Durchführung der Messung und der dabei auftretenden Schwierigkeiten vgl. I, S. 507.)

Während bei nicht vorerregter Zündung, in die wir auch Zündung mit Elektronen emittierender Kathode einschließen wollen²⁾, das

1) Vgl. den zusammenfassenden Bericht: H. Althertum, M. Reger und R. Seeliger, Ztschr. f. techn. Phys. 9, S. 161. 1928.

2) Die Ergebnisse der Schellenversuche haben dies bereits nahegelegt, und unsere Sondenmessungen bestätigen es einwandfrei.

Zündfeld an der ungeerdeten Elektrode mit beträchtlicher Feldstärke (ungefähr 150 Volt/cm) beginnt und je nach der Rohrspannung mehr oder weniger weit in das Rohr hineinreicht, aber stets stark abfällt, liegt bei vorerregter Zündung die Stelle größter Feldstärke unabhängig von der Erdung stets bei der nicht vorerregten Elektrode; das Feld beginnt dort mit kleineren Werten (40—25 Volt/cm), fällt wesentlich flacher ab und reicht dementsprechend weiter in das Rohr hinein. Bei kleinen Hilfsregungen¹⁾ ist zwar kein Einfluß der Erdung auf den prinzipiellen Verlauf der Feldverteilung zu bemerken; immerhin aber verläuft bei Erdung der nicht vorerregten Elektrode die Feldverteilung flacher und reicht etwas weiter als bei Erdung der Hilfs-elektrode. In Abb. 11 ist über der Rohrlänge die gemessene Feldverteilung für 4 Fälle eingezzeichnet und zwar 1. für nicht vorerregte

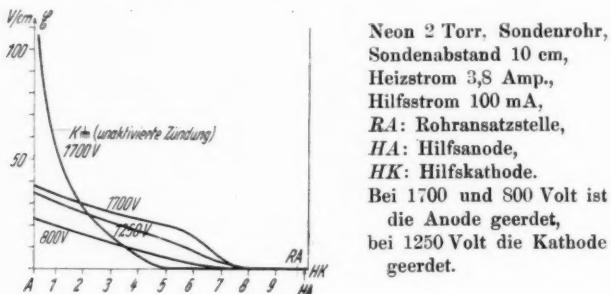


Abb. 11. Feldverteilung

anodische Zündung, Kathode geerdet, bei 1700 Volt Rohrspannung, 2. vorerregte kathodische Zündung, Anode geerdet, bei 1700 Volt Rohrspannung, 3. vorerregte kathodische Zündung, Kathode geerdet, bei 1250 Volt Rohrspannung, 4. vorerregte kathodische Zündung, Anode geerdet, bei 800 Volt Rohrspannung. Die Fälle 2—4 beziehen sich auf die Hilfsstromstärke von 100 mA. Rohransatzstelle, Hilfs-anode und Hilfskathode sind schematisch angedeutet. Aus der Abbildung geht hervor, daß bei konstanter Hilfsregung die Reichweite des Feldes von der nicht vorerregten Elektrode in das Rohr hinein von der angelegten Rohrspannung unabhängig zu sein scheint.

1) Ob die bei kleinen Hilfsregungen beobachtete schichtartige Feldstruktur reell oder durch die Unsicherheiten der Messung bedingt wird, konnte noch nicht entschieden werden. Sie stehen vielleicht mit den optisch beobachteten Schichten (vgl. S. 130) in Zusammenhang, wenn auch der optische Schichten-abstand viel kleiner ist als der der Feldschichten.

(Die Feldverteilung für 1250 Volt, Kathode geerdet, reicht nur unwesentlich weiter als die beiden anderen, für die die Anode geerdet war.) Beim Vergleich mit der Feldverteilung für die nicht vorerregte Zündung erkennt man, daß die in der Einleitung ausgesprochene Vermutung, daß das Zündfeld durch die Vorerregung homogenisiert wird, in der Tat bis zu einem gewissen Grade bestätigt wird.

Diskussion

Wenn auch eine erschöpfende Diskussion zur Zeit noch nicht möglich ist, lassen sich doch einige grundsätzliche Feststellungen über den Mechanismus der Hilfszündung treffen. Er ist verschieden von dem bei nicht vorerregter Zündung, 1. weil vor der Zündung ein um mehrere Größenordnungen höherer Vorstrom fließt und 2. weil die Struktur des Feldes vor der Zündung weitgehend von den Erdungsverhältnissen unabhängig ist. Daß der „Zündwolkenmechanismus“ (vgl. I) nicht vollständig ausgeschaltet ist, sieht man an den Stoßzündversuchen und an dem doch noch in geringem Maße vorhandenen Einfluß der Erdung. Wenn wir auch nur die extremen Grenzfälle der Gleitgeschwindigkeit (langsame Gleitgeschwindigkeit von 30 Volt pro Sekunde und Stoßzündung) untersucht haben, so kann doch gesagt werden, daß der Wolkenmechanismus bei der Zündung nur so lange eine Rolle spielen kann, als der kapazitive Wolkenstrom („der innerhalb weiter Grenzen mit der Gleitgeschwindigkeit proportional geht“) die Größenordnung des Vorstroms auf Grund der Vorionisation erreicht oder übertrifft.

Aus den Eigenschaften eines Plasmas ist zu verstehen, daß an der vorerregten Elektrode, abgesehen vom Kathodenfall der Hilfsentladung vor der Zündung nur ein schwaches Feld bestehen kann. Aus der Kugel diffundieren die Träger mit einer durch Wandladung gesteuerten Längsdiffusion und verlängern das Plasma bis zu einer gewissen Länge in das Rohr hinein [Plasmafortsatz¹⁾]. Diese Diffusion ist vor Anlegung der Rohrspannung ambipolar; aber, während bei der normalen ambipolaren Diffusion der gemittelte Diffusionskoeffizient durch Raumladungsfelder eingestellt wird, die von vorweigelnden Elektronen gebildet werden, wirkt hier zusätzlich noch eine negative, longitudinal inhomogene Wandladung mit, die ebenfalls von vorausgeeilten Elektronen gebildet wurde.

Durch Anlegen der Rohrspannung werden, wie der mit zunehmender Rohrspannung rasch ansteigende Vorstrom zeigt, aus dem Plasma

1) Der Plasmafortsatz ist durch das praktisch feldfreie Gebiet vor der vorerregten Elektrode in Abb. 11 erkennbar.

der Hilfsentladung in zunehmendem Maße Ladungsträger abgesaugt. Merkwürdigerweise scheint jedoch die Länge des Plasmafortsatzes dadurch nicht wesentlich beeinflußt zu werden, da bei beträchtlich veränderter Rohrspannung das Feld vor der nicht vorerregten Elektrode seine Ausdehnung nicht merklich ändert. Mit diesem Befund steht das Ergebnis einer theoretischen Überlegung von Seeliger und Bock¹⁾ in Übereinstimmung, die gefunden hatten, daß der mittlere Lebensweg eines Ladungsträgers in einem zylindrischen Rohr vom Feld unabhängig ist.

Die Konzentration des Trägerfortsatzes klingt mit einer durch die mittleren Lebenswege der Träger bestimmten Halbwertslänge L exponentiell ab. Nun sei das Ende des Plasmafortsatzes durch eine gewisse minimale Konzentration n_e bestimmt. Man sieht nun, daß, wenn die Anfangskonzentration n_o wächst, sich das durch n_e bestimmte Ende des Fortsatzes weiter in das Rohr hinein verschiebt; durch eine einfache Rechnung ergibt sich nämlich für das Ende des Fortsatzes

$$x_e = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{n_o}{n_e} \right).$$

Wenn die Diffusion im Plasmafortsatz in normaler Weise ambipolar wäre, müßte die Halbwertslänge für beide Arten der Hilfszündung gleich sein. Da aber für anodische Hilfszündung Feld- und Diffusionsrichtung für die Elektronen entgegengesetzt sind, ist die Halbwertslänge geringer als bei kathodischer Hilfszündung.

Damit ist wenigstens zum Teil der Verlauf der Zündspannungs senkung, insbesondere das Auftreten einer Sättigung verständlich geworden: die Kurven für die Zündspannungs senkung haben alle mehr oder weniger logarithmischen Charakter. Die Sondenmessungen zeigen aber, daß es nicht genügt, die Zündspannungs senkung zu verstehen lediglich durch eine Verkürzung des Rohres infolge des Plasmafortsatzes der Hilfsentladung; es kommt noch eine Verflachung des longitudinalen Feldes in dem nicht vom Fortsatz erreichtem Rohrteil gegenüber dem Feld bei nicht vorerregter Zündung (Abb. 11) hinzu. Beim Anlegen einer Spannung an das Rohr werden nämlich aus dem Plasmafortsatz Träger abgesaugt (Vorstrom), die in den übrigen Teilen des Rohres durch Wandladungen ein longitudinales Feld aufbauen. Da wegen der ambipolaren Trägervernichtung an der Wand in den nicht vom Plasma erreichten Rohrteilen eine Neuerzeugung der Träger stattfinden muß und die Nachlieferung aus dem Plasma-

1) R. Seeliger u. K. Bock, a. a. O.

fortsatz, je mehr man sich von ihm entfernt, um so schwieriger wird, wird das Feld an der nicht erregten Elektrode seinen höchsten Wert haben. Wegen der Verflachung des Feldes wird also zur Zündung noch weniger Spannung benötigt als zur Zündung eines entsprechend der Länge des Plasmafortsatzes verkürzten Rohres.

Nach den bereits erwähnten Vorstellungen Steenbecks und Mierdels ist zur Säulenbildung eine kritische Längsfeldstärke nötig, bei der ein Kippvorgang durch Herabsetzung der Trägervernichtung an der Rohrwand eintritt. Nun ist sowohl für vorerregte als auch für nicht vorerregte Zündung das Feld durchaus nicht longitudinal konstant, wie die Steenbeck-Mierdelsche Theorie voraussetzt; außerdem wird sicherlich in einem gewissen Teil des Feldgebiets die kritische Feldstärke überschritten, daher müßte der andere Teil, in dem die Feldstärke unterhalb der kritischen liegt, eine „Sperrwirkung“ ausüben. Erst, wenn durch Erhöhen der Rohrspannung das Sperrgebiet vollständig zusammengeschrumpft ist, kann die Zündung erfolgen.

Bei der Diskussion der Druckabhängigkeit der Zündspannungsabsenkung müssen mindestens drei Punkte beachtet werden. 1. ist zu untersuchen, wie der Plasmafortsatz vom Druck beeinflußt wird. Solange die Überlegung von Seeliger und Bock noch zutreffend ist, wird mit abnehmendem Druck der mittlere Lebensweg kleiner. Jedoch kann vorausgesehen werden, daß dies nur so lange gelten kann, als die freie Weglänge noch klein gegen die Rohrdimensionen ist. Eine beträchtliche Rolle spielt 2. die Druckabhängigkeit der Feldstruktur in dem übrigen Rohrteil. Darüber können wir nicht einmal aussagen, ob sie in entsprechender Weise wie bei nicht vorerregter Zündung verläuft. 3. der dritte Punkt ist nicht von prinzipieller Bedeutung, sondern er ist lediglich meßmethodischer Natur. Man wird zwar für einen konstanten Druck — wie wir es getan haben — annehmen dürfen, daß die Trägerdichte an der Rohransatzstelle dem Hilfsstrom (soweit die Hilfssentladung stabil brennt!) proportional ist; für verschiedene Drucke werden jedoch bei gleichen Hilfsstromstärken beträchtliche Unterschiede in der Trägerkonzentration an der Rohransatzstelle vorhanden sein. Man müßte also, wie wir auf Seite 125 bereits erwähnt haben, die Trägerkonzentration an dieser Stelle durch Sondenmessungen bestimmen und als Vergleichsparameter benutzen. Da wir derartige Messungen und Messungen der Feldstruktur bei verschiedenem Druck noch nicht haben durchführen können, müssen wir uns mit der Aufzeigung dieser drei Punkte begnügen und auf eine Diskussion der Druckabhängigkeit verzichten.

Zusammenfassung

In Abhängigkeit von Druck und Hilfsstromstärke wurde in Neon die Zündspannungssenkung eines langen Entladungsrohres untersucht. In Abhängigkeit vom Hilfsstrom wurden Vorstromcharakteristiken bis zum Zündpunkt aufgenommen und die Feldverteilung vor der Zündung gemessen. Aus den erhaltenen Ergebnissen lassen sich einige grundsätzliche Feststellungen über den Mechanismus der Zündung bei Vorionisation treffen.

Herrn Prof. Seeliger danken wir für mannigfache Anregungen und wertvolle Diskussionen. Der Studiengesellschaft für Elektrische Beleuchtung sind wir für die Überlassung von Edelgas und anderem benötigten Material, der Helmholtzgesellschaft für die Mittel zur Beschaffung von Meßinstrumenten zu besonderem Dank verpflichtet. Die Mitarbeit des einen von uns (Wolter) war durch die Gewährung eines Stipendiums von der Forschungsgemeinschaft ermöglicht.

Greifswald, Seminar für Theoretische Physik, im Oktober 1939.

(Eingegangen 10. Dezember 1939)

**Das Rückbildungsverfahren zur Untersuchung
von Zustandsänderungen in Metallen**

Von Hermann Auer und Hubert Schröder

(Mit 6 Abbildungen)

In den letzten $1\frac{1}{2}$ Jahren ist zur Untersuchung der atomaren Vorgänge, die mit der technischen Aushärtung von Leichtmetalllegierungen verknüpft sind, mehr und mehr das sogenannte Rückbildungsverfahren herangezogen worden¹⁾. Es beruht im wesentlichen darauf, daß man die Existenz und thermische Stabilität der während der Aushärtung durchlaufenen Zustände beurteilt aus der Größe und der Geschwindigkeit der Rückbildung dieser Zustände, die bei Temperaturerhöhung erfolgen kann.

Die Erscheinung der Rückbildung selbst hat sich zwar schon bei verschiedenen früheren Untersuchungen geäußert²⁾ — wir erinnern hier nur an den sogenannten „Zusammenbruch der Kalt-aushärtung“ — aber erst die quantitative Auswertung systematischer Messungen hat es ermöglicht, mit Hilfe des Rückbildungsverfahrens eine Analyse auch komplizierter Zustandsänderungen durchzuführen und darüber hinaus Aussagen über den inneren Aufbau und die Atomanordnungen der Zustände zu machen.

Die vor allem metallkundlichen interessierenden Fragen sind von uns verschiedentlich an anderer Stelle im Zusammenhang mit der Untersuchung spezieller Legierungssysteme behandelt worden. Wir wollen in dieser Arbeit versuchen, die physikalischen Grundlagen des Verfahrens aufzuzeigen und durch eine systematische Erörterung der Vorgänge während der Rückbildung die Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens auf Fragen des energetischen und atomaren Aufbaues der Zustände zu sichten.

1. Die physikalischen Grundlagen des Rückbildungsverfahrens

Zustandsänderungen in metallischen Systemen können dann auftreten, wenn durch Konzentrations- oder Temperaturänderung

1) H. Auer u. K. Siemens, Ztschr. f. Metallkde **30**. S. 86. 1938. H. Auer, Ztschr. f. Metallkde **30**. S. 48—52. 1938. H. V (Vortragsschrift d. Hauptversammlung München 1938); K. L. Dreyer, Ztschr. f. Metallkde **31**. S. 147—150. 1939; H. Auer, Ztschr. Elektrochem. **45**. S. 608—615. 1939; H. Auer u. W. Gerlach, Naturw. **27**. S. 299. 1939.

2) M. L. V. Gayler u. G. D. Preston, Journ. Inst. Met. Lond. **41**. S. 191 bis 234. 1929; H. Meyer, Ztschr. f. Phys. **76**. S. 268. 1932.

ein „übersättigter“ oder sonstwie instabiler Zustand entsteht. Dieser sucht dann durch irgendeine Bewegung von Atomen wieder in einen Gleichgewichtszustand überzugehen, wie er durch das Zustandsbild gegeben ist.

Die Umlagerung der Atome kann dabei entweder aus einer Änderung der Atomverteilung (z. B. Anreicherung) oder auch der Atomabstände (Gitteränderung bei Ausscheidungen) bestehen. Jedenfalls aber wird bei einer normalen einheitlichen Zustandsänderung (ohne störende Nebeneffekte), der atomare Vorgang kontinuierlich vom Ausgangszustand bis zum Gleichgewichtszustand durchlaufen.

Bei Temperaturerhöhung während der Zustandsänderung muß, entsprechend der erhöhten Beweglichkeit der Atome, der Vorgang

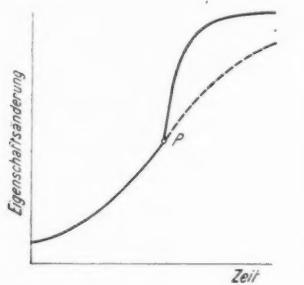


Abb. 1 a. Normale Eigenschaftsänderung bei Temperaturerhöhung

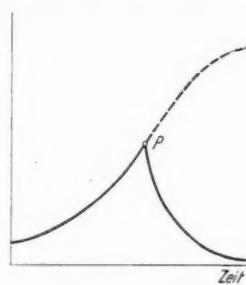


Abb. 1 b. Rückläufige Eigenschaftsänderung bei Temperaturerhöhung

beschleunigt, jedoch aber in gleicher Richtung ablaufen, sofern nur der Gleichgewichtszustand, dem die Reaktion zustrebt, auch bei der nun höheren Temperatur noch unverändert ist.

Dementsprechend müßte sich eine physikalische Eigenschaft, die als Maß der atomaren Umsetzung, z. B. einer Anreicherung und darauffolgenden Ausscheidung herangezogen wird, im gleichen Richtungssinn, wenn auch beschleunigt ändern, wenn man während des Vorgangs plötzlich auf höhere Temperatur übergeht.

Der zu erwartende Verlauf der Eigenschaftsänderung ist durch die Abb. 1 a gekennzeichnet, wenn von dem Zeitpunkt P an die sonst eintretende Zustandsänderung durch Temperaturerhöhung beschleunigt wird.

Wenn man demgegenüber einen Verlauf nach Abb. 1 b erhält, die Eigenschaftsänderung also bei Temperatursteigerung ihre Richtung wechselt und der ursprünglichen Einstellung des Gleichgewichts

anscheinend entgegenläuft, so kann einer der folgenden drei Gründe hierfür maßgebend sein:

1. Es handelt sich zwar um eine einheitliche Zustandsänderung, die kontinuierlich ihrem Gleichgewichtszustand zuläuft. Der atomare Vorgang wirkt jedoch während seines zeitlichen Ablaufes in verschiedener Richtung auf die untersuchte Eigenschaft ein, so daß diese unter Umständen sogar ein Maximum oder Minimum durchläuft.

Dieser Fall liegt z. B. bei der zeitlichen Änderung des elektrischen Widerstandes an einer übersättigten Al-Cu-Legierung vor, wo während der Kaltaushärtung bei Raumtemperatur ein Widerstandsmaximum durchlaufen wird¹⁾.

Nach den Untersuchungen von W. Hartnagel²⁾ ist der Grund für diese Richtungsumkehr darin zu sehen, daß die ersten Anreicherungen der Fremdatome Störungen im Mischkristallgitter und dadurch eine Widerstandszunahme hervorrufen. Im weiteren Verlauf der kontinuierlichen Anreicherung bilden sich dann größere angereicherte Gebiete mit eigener, guter Leitfähigkeit im Mischkristall aus, die den Gesamtwiderstand herunter- und den Temperaturkoeffizienten heraufsetzen.

Bei plötzlicher Temperaturerhöhung während der Zustandsänderung kann hiernach eine Richtungsumkehr der Eigenschaftsänderung auftreten, da man vom ansteigenden auf den abfallenden Teil der Eigenschaftskurve übergeht.

Als quantitatives Beispiel für diese Richtungsumkehr des Widerstandes sind in Abb. 2a Meßergebnisse eingetragen, die uns freundlicherweise von Herrn Dr. W. Hartnagel aus unveröffentlichten Untersuchungen zur Verfügung gestellt wurden. Der Widerstandsanstieg einer von 550° abgeschreckten Probe aus Al mit 5% Cu bei Raumtemperatur wird durch plötzliche Temperaturerhöhung von 25° auf 100° sofort unterbrochen und sinkt nunmehr nach einem Kurvenverlauf, der bei 25° erst nach viel späterer Zeit erreicht würde.

Aus eingehenden anderen Untersuchungen³⁾ wissen wir jedoch ganz sicher, daß sowohl bei 25° wie bei 100° ein einheitlicher atomarer Vorgang kontinuierlich abläuft, und zwar bei beiden Temperaturen der gleiche, nämlich die Bildung des sogenannten *a*-Zustandes der Kaltaushärtung, eine einfache Anreicherung im Mischkristall. Der Verlauf der magnetischen Suszeptibilität während der gleichen Temperaturbehandlung, der in Abb. 2b wiedergegeben ist, zeigt den normalen Ablauf dieser Zustandsänderung.

1) W. Stenzel u. J. Weerts, Metallwirtsch. **12**, S. 353—356, 369—374. 1934.

2) W. Hartnagel, Metallkde **30**, S. 81—86. 1938.

3) H. Auer, Ztschr. f. Elektrochem. **45**, S. 608—615. 1939.

2. Eine Umkehr von Eigenschaftsänderungen während einer Zustandsänderung kann auch auftreten, wenn es sich um einen zusammengesetzten Vorgang handelt, d. h. wenn mit der primären Zustandsänderung noch weitere Vorgänge im Metall verknüpft sind, die

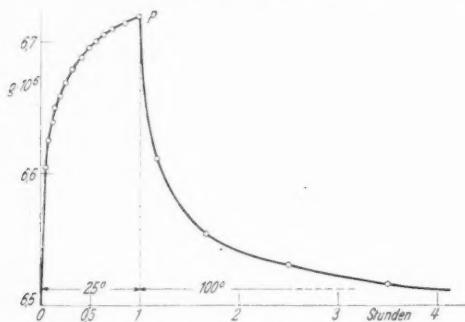


Abb. 2a. Zeitliche Widerstandsänderung einer übersättigten Aluminium-Kupfer-Legierung bei Temperaturerhöhung auf 100°

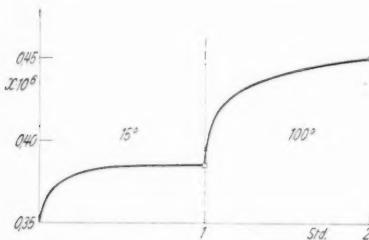


Abb. 2b. Zeitliche Änderung der magnetischen Suszeptibilität einer übersättigten Aluminium-Kupfer-Legierung (5% Cu) bei Temperaturerhöhung auf 100°

ebenfalls, aber in verschiedener Richtung, auf die untersuchte Eigenschaft einwirken.

Wenn die Geschwindigkeit der Vorgänge in verschiedener Weise von der Temperatur abhängt, kann bei tiefer Temperatur die Gesamtwirkung in einer, bei hoher Temperatur in der anderen Richtung gehen, so daß bei Temperaturerhöhung eine Richtungsänderung des Eigenschaftsverlaufes eintreten kann.

Denken wir z. B. an die Wirkung von Abschreck- oder Verformungsspannungen, die bei Temperatursteigerung verschwinden und deren Abnahme sich in entgegengesetzter Richtung der normalen Zustandsänderung überlagern kann.

In ähnlicher Weise sind Untersuchungen an Legierungen von Nickel mit Silizium von Dahl¹⁾ gedeutet worden, indem er die bei Temperaturerhöhung zunächst rückläufigen Härtekurven als Überlagerung von Enthärtungs- und Härtungseffekten auffaßt.

Da jedoch die überlagerten Effekte zum Teil nur durch die Temperaturerhöhung nicht aber unmittelbar durch den Ablauf der Zustandsänderung hervorgerufen sind, muß auch hier ein Rückgang der Eigenschaftsänderung kein Kennzeichen für eine wirklich atomare Rückbildung der ursprünglichen Zustandsänderung sein.

3. Vor dem Übergang der Atome aus dem übersättigten, ungeordneten Mischkristall in eine neue Phase (also vor oder statt des endgültigen Gleichgewichtszustandes), können bestimmte atomare Anordnungen auftreten, die als Vorzustände, im besonderen als Zwischen- bzw. Nebenzustände bezeichnet werden²⁾.

Ein Zwischenzustand ist in dieser Definition eine unmittelbare Vorstufe der Ausscheidung, eine vorbereitende Atomanordnung, aus der heraus sich die Ausscheidung bildet, während ein Nebenzustand eine mehr oder weniger selbständige Atomanordnung oder Anreicherung innerhalb des Mischkristalls darstellt, die die betreffenden Atome durchaus nicht zur endgültigen Ausscheidung führen muß, sondern die eher als eine Art Sackgasse für die Atomausscheidung anzusehen ist.

Bekanntlich sind diese Vorzustände für die starken Änderungen der mechanischen Eigenschaften verantwortlich, die in der Aushärtungstechnik so große praktische Bedeutung erlangt haben. Da es sich jedoch nicht um Gleichgewichtszustände handelt, die im Zustandsbild ihren Ausdruck finden, ist über den physikalischen Aufbau dieser Zustände, also ihre Atomanordnung und ihre thermische Stabilität noch verhältnismäßig wenig bekannt. Allgemein ist durch verschiedene Arbeiten von Dehlinger, Becker, Bragg u. a. das Auftreten von vorbereitenden Zuständen durch die Annahme verständlich gemacht worden, daß im ungeordneten Mischkristall beim Überwiegen der atomaren Bildungskräfte zwischen *gleichartigen* Atomen eine sogenannte negative Diffusion auftreten kann, die zufällig entstehende Konzentrationschwankungen noch verstärkt und zur Anreicherung und schließlich Ausscheidung der überschüssigen Atome der einen Atomsorte führen wird.

1) O. Dahl, Ztschr. f. Metallkde 24, S. 277, 1932; vgl. auch H. Lay, Ztschr. f. Metallkde 28, S. 379, 1936.

2) In der früheren Literatur wurde bisher häufig für jede Art von Atomanordnung vor der eigentlichen Ausscheidung die Bezeichnung „Zwischenzustand“ gewählt.

Die atomaren Bindungs Kräfte stehen dabei in Konkurrenz mit der Energie der thermischen Bewegung, die stets die statistische Unordnung, den Konzentrationsausgleich, anstrebt. Hierdurch wird eine Temperaturabhängigkeit in der Bildung der Anreicherungszustände hervorgerufen. Mit steigender Temperatur wird die mögliche, stabile Menge des gebildeten Zustandes nach irgendeiner „Existenzkurve“ abfallen und bei einer Grenztemperatur T_g praktisch Null werden.

Bei einer Temperaturerhöhung über T_g haben wir es also mit einer (echten) Rückbildung der atomaren Anordnung des Vorzustandes zu tun, die den ursprünglichen Ausgangszustand wieder erreichen läßt.

Eine solche rein energetische Bestimmung der thermischen Stabilität der Vorzustände etwa durch Aufnahme der Existenzkurve ist offensichtlich weitgehend unabhängig von dem Mechanismus der benutzten Eigenschaft, sofern nur eine eindeutige Zuordnung von Eigenschaftsänderung und Menge des gebildeten Zustandes vorliegt.

In diesem Falle kann der bei Temperaturerhöhung über T_g beobachtete Rückgang der Eigenschaft als Maß für die Menge des vorher vorhandenen Zustandes gelten.

Dies ist die Grundlage des Rückbildungsverfahrens für die Analyse von Zustandsänderungen.

II. Bedingungen für die Durchführung des Rückbildungsverfahrens

Zur praktischen Anwendbarkeit des Verfahrens müssen drei Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Der untersuchte Zustand muß eine mit steigender Temperatur auf Null abfallende Existenzkurve besitzen.

2. Durch die zur Rückbildung nötige Temperaturerhöhung dürfen während der zur Rückbildung erforderlichen Zeit keine weiteren Änderungen des Systems hervorgerufen werden, d. h. die Rückbildungsgeschwindigkeit des betreffenden Zustandes muß größer als die Bildungsgeschwindigkeit irgendwelcher anderer Zustände oder Vorgänge sein.

3. Bei Überlagerung mehrerer Vorzustände müssen die abfallenden Gebiete der jeweiligen Existenzkurven entweder soweit getrennt sein, daß bei der Grenztemperatur T_g des rückzubildenden Zustandes die Beständigkeit der anderen noch einigermaßen temperaturunabhängig ist — oder aber es müssen die Rückbildungsgeschwindigkeiten hinreichend verschieden sein.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann man auch in zusammengesetzten Systemen durch folgeweises Rückbilden in geeigneten Temperaturstufen mehrere überlagerte Zustände analysieren.

III. Der energetische Aufbau der Vorzustände

Im Abschnitt VI dieser Arbeit wird an Hand von magnetischen Messungen am System Aluminium-Kupfer gezeigt werden, wie mit Hilfe des Rückbildungsverfahrens unter Berücksichtigung der genannten Voraussetzungen die Analyse einer Zustandsänderung durchgeführt und das zeitliche Entstehen und verschwinden von 2 Vorzuständen und der schließlichen Ausscheidung quantitativ verfolgt werden konnte.

Wir wollen jedoch in dieser systematischen Übersicht noch weitere Überlegungen anstellen, die es ermöglichen, nicht nur die augenblickliche Menge der verschiedenen Zustände zu analysieren, sondern auch Aussagen über den energetischen Aufbau und die Einheitlichkeit der Atombindungen in den Zuständen zu machen.

Unsere experimentellen Ergebnisse haben uns zur Annahme von zwei grundsätzlich verschiedenen Möglichkeiten von Anreicherungen im Mischkristall geführt, die durch die verschiedenartige energetische Stabilität der Ansammlungen bei Temperaturänderungen unterschieden werden können.

1. Die erste Möglichkeit, wie wir sie z. B. in der Kaltaushärtung von Al-Cu realisiert fanden, ist dadurch gekennzeichnet, daß es sich bei der Anreicherung um einen einheitlichen Komplexzustand handelt.

Bei Temperatursteigerung ändert sich lediglich die Menge des gebildeten Zustandes, nicht aber die mittlere Bindungsfestigkeit der den Zustand aufbauenden Atome. Alle Atome besitzen, solange sie überhaupt dem Zustand angehören, für die jeweilige Temperatur ungefähr die gleiche freie Energie; der Zustand als Ganzes hat eine von der Temperatur unabhängige Aktivierungsenergie. „*Einheitlicher Komplex*“.

2. Im Gegensatz hierzu kann der Vorzustand aber auch ein mehr oder weniger kontinuierliches Spektrum von atomaren Bindungen verschiedener thermischer Stabilität enthalten, deren Häufigkeit durch irgendeine Verteilungsfunktion statistisch bestimmt ist.

Bei Temperaturerhöhung verschiebt sich der Schwerpunkt dieser Verteilungskurve zu stärkerer Bindungsfestigkeit, da die schwächer gebundenen Komplexe der größeren thermischen Energie nicht mehr standhalten können.

Hier kann man natürlich weder von einer einheitlichen Bindungsfestigkeit noch von konstanter Aktivierungsenergie sprechen.

IV. Bestimmung der Einheitlichkeit eines Zustandes

Um in einem konkreten Fall zu entscheiden, ob bei einem Vorzustand ein mehr oder weniger kontinuierliches Spektrum von

Atombindungen oder aber eine scharfe Linie ein einheitlicher Bindungszustand vorliegt, muß die Mengenänderung der Zustände bei ganz bestimmten Temperaturänderungen zeitlich verfolgt werden, d. h. es muß die Kinetik der Zustände bei Änderungen der Temperatur aufgenommen werden.

Man kann schon aus den oben entwickelten Vorstellungen über den verschieden einheitlichen Stabilitätsaufbau der Zustände qualitativ voraussagen, wie sich in den beiden Fällen die Menge der Zustände mit der Temperatur ändern wird.

Wenn für eine bestimmte Temperatur die *maximal mögliche* Menge eines Zustandes durch hinreichend langes Temperiern gebildet ist, so wird in beiden Fällen bei weiterer Temperatursteigerung

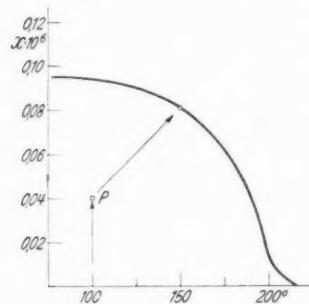


Abb. 3a. Existenzkurve
des Vorzustandes *a*

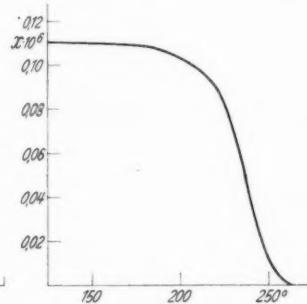


Abb. 3b. Existenzkurve
des Vorzustandes *b*

die Menge des vorhandenen Zustandes nach irgendeiner „Existenzkurve“ abnehmen, wie sie nach magnetischen Messungen durch die Kurven der Abb. 3a dargestellt ist.

Diesen Kurven sieht man zunächst noch nicht ohne weiteres an, daß sie im einen Fall aus einem einheitlichen Zustand (a), im andern aus einer Vielzahl von Bindungsmöglichkeiten (b) aufgebaut sind.

Anders wird dies jedoch, wenn wir nicht diese Existenzkurven, sondern die Kinetik der zeitlichen Einstellung der einzelnen Kurvenpunkte in beiden Fällen verfolgen.

Bei einem einheitlichen Zustand ist lediglich die maximal gebildete Menge eine Funktion der Temperatur. Hat man diese für eine bestimmte Temperatur erreicht, und geht mit der Temperatur in die Höhe bis in ein Gebiet, in dem die Existenzkurve schon stark abgefallen ist, dann wird eben ein Teil des Zustandes abgebaut, bis die für die neue Temperatur stabile Menge erreicht ist.

Geht man mit der Temperatur zurück, nimmt die Maximalmenge entsprechend der Existenzkurve wieder zu, die Kurve kann reversibel durchlaufen werden.

Bei einem uneinheitlichen, aus verschiedenartigen Bindungen zusammengesetzten Zustand liegen die Verhältnisse anders. Hier ändert sich bei Temperaturänderung ja nicht nur die Gesamtmenge, sondern auch die energetische Zusammensetzung, d. h. die Verteilungskurve.

War vorher schon die Maximalmenge gebildet, so werden nun bei der höheren Temperatur schwächere Bindungen zerstört, dafür aber vielleicht sogar stärker gebundene Komplexe entsprechend der erhöhten Diffusionsgeschwindigkeit der Atome gebildet werden können.

Eine solche Verschiebung der Verteilungskurve wird nun wohl auch in einer Änderung der Existenzkurve gegenüber der des einheitlichen Zustandes zum Ausdruck kommen und dadurch der experimentellen Prüfung zugänglich sein. Zur Unterscheidungsmöglichkeit zwischen einheitlich und uneinheitlich setzt dies jedoch die genaue Kenntnis der thermisch bedingten Existenzkurve eines einheitlichen Zustandes voraus.

Für die experimentelle Prüfung günstiger ist ein anderes Verfahren, das darauf beruht, daß man nicht zuerst bei der tieferen Temperatur die maximale Zustandsmenge sich bilden läßt, sondern von einem zeitlichen Zwischenwert, von dem aus also die Ausbildung des Zustandes noch weiter lief, rasch auf höhere Temperatur geht (Abb. 3 a, Punkt *P*).

Bei einem *einheitlichen* Zustand ist es klar, daß der Vorgang, und zwar beschleunigt, weiterläuft, wenn die maximale Menge bei der neuen Temperatur größer ist als der vorher erreichte Zustand.

Bei einem *uneinheitlichen* Zustand hingegen tritt zu der mengenmäßigen Zunahme bei erhöhter Temperatur noch die Umbildung der Verteilungskurve. Wie wir oben sahen, verlagert sich hier der Schwerpunkt der Verteilungskurve zu stärkeren Bindungen, d. h. die stabileren Bindungen werden stärker anwachsen als die schwächer gebundenen Komplexe. Ja es kann sogar vorkommen, daß ein Teil der schwächeren Bindungen entsprechend der neuen Verteilungskurve abgebaut werden muß. Wenn nun dieser Abbau schneller eintritt als die Neubildung der stärkeren Komplexe, so wird man bei Temperaturerhöhung eine Rückbildung erzielen, obwohl noch gar nicht die Maximalmenge des Zustandes erreicht war. Dieser Fall liegt auch bei der Wärmeaushärtung von Al-Cu, dem sogenannten Zustand *b*, vor, wie wir in den experimentellen Ergebnissen (Abschn. VI) darstellen werden.

V. Temperaturhysterese bei der Bildung von Vorzuständen

Zum Schluß wollen wir noch auf eine Überlegung hinweisen, die sich an die Vorstellung der Volmerschen Keimbildungstheorie anschließt.

Nach dieser Auffassung gibt es eine kritische Keimbildungsgröße G_k , die mit der Temperatur wächst und von stabilen Keimen nicht unterschritten werden kann. Bei jeder Temperatur werden nur Keime, die größer als G_k sind, weiterwachsen, die kleineren werden abgebaut werden.

Wenn man also zunächst die Temperatur soweit erhöht, daß der Bereich der Existenzkurve weit überschritten ist, alle Keime also sicher zerstört sind, und nun mit der Temperatur zurückgeht, dann werden sich nicht ohne weiteres entsprechend der Existenzkurve Komplexe bilden können; es sind ja zunächst bei diesen Temperaturen nur größere Komplexe stabil, die sich aber nicht sofort und ohne Übergang über kleinere Keime aus dem komplexfreien Zustand bilden. Ähnliche Verhältnisse können bei der Bildung von Komplexzuständen in Mischkristallen vorliegen, wobei allgemein der Begriff der Keimgröße auf die Stärke der Komplexbindung zu übertragen wäre.

Man erhält auf diese Weise eine Temperaturhysterese in der Bildung der Vorzustände. Wenn man die Temperatur allmählich steigert, fällt die Zustandsmenge nach der Existenzkurve ab. Kommt man umgekehrt von hoher Temperatur, so kann sich schon beim Einsetzen der Existenzkurve der Zustand bilden, sondern erst bei den tieferen Temperaturen, bei denen auch die kleineren bzw. schwächer gebundenen Komplexe als Übergang zu den stärkeren möglich sind.

Das Auftreten einer solchen Temperaturhysterese zwischen der Bildung und der Rückbildung eines Zustandes wäre also nach dieser Deutung ein Hinweis auf die Größe der Komplexbereiche. Reversibilität der Existenzkurve bedeutet, daß entweder keine solche einschränkende Bedingung einer minimalen Komplexgröße vorliegt oder aber die ausgebildeten Sammlungsbereiche an sich nur sehr klein sind.

Auch hierfür werden wir ein experimentelles Beispiel im folgenden Abschnitt mitteilen.

VI. Die experimentelle Durchführung der Rückbildungsanalysen

Die in den vorangehenden Abschnitten entwickelten Vorstellungen sind nicht etwa nur das Ergebnis von Gedankenexperimenten, sondern sind durch eine große Zahl systematischer Messungen gestützt. Wir heben aus diesen Untersuchungen, die z. T. an anderen Stellen ver-

öffentlicht sind, eine sehr gedrängte Auswahl von prinzipiell wichtigen Resultaten hervor, welche die Grundlagen des Rückbildungsverfahrens und seine Anwendungsmöglichkeiten klarmachen sollen.

Die Untersuchung der Existenz und der thermischen Stabilität der Zustände mittels Rückbildung ist ja, wie oben ausgeführt, nicht an die spezifische Wirkungsweise einer physikalischen Eigenschaft gebunden, sondern kann mit jeder Meßgröße durchgeführt werden, sofern diese nur ein eindeutiges Maß für die atomare Zustandsänderung darstellt.

Wir haben darum auch mehrere Eigenschaften für die Untersuchung herangezogen und z. B. mittels der Thermokraft, der spezifischen Wärme, der Brinellhärte, sowie des elektrischen Widerstandes und seines Temperaturkoeffizienten quantitative Rückbildungsmessungen durchgeführt.

Die übersichtlichsten Resultate haben wir jedoch, wohl auch dank einer besonders sorgfältig entwickelten Versuchsmethodik¹⁾ durch die Messung der magnetischen Suszeptibilität erzielt. Wir werden uns daher in den folgenden Beispielen auf die Ergebnisse der magnetischen Untersuchungen beschränken, wollen dabei aber doch besonders darauf hinweisen, daß mit den anderen Eigenschaften prinzipiell gleichartige Ergebnisse erhalten wurden.

1. Rückbildung und Existenzkurve eines einfachen Zustandes

Die Abb. 4a gibt die Änderung der paramagnetischen Suszeptibilität an, die eine Legierung von Al mit 5% Cu bei 100° erfährt, wenn sie vorher bei 550° homogenisiert und auf 0° abgeschreckt wurde. Diese Suszeptibilitätszunahme läuft parallel mit einem Anstieg der Härte sowie anderer mechanischer Eigenschaften, der sich hierbei ausbildende Zustand *a* im Mischkristall ist für die sogenannte Kaltaushärtung verantwortlich. Nach etwa einer Stunde beginnen wir mit der Rückbildung, um die Existenzkurve des bei 100° gebildeten Zustandes aufzunehmen.

Wir erhöhen hierzu nach Abb. 4b die Temperatur um einen bestimmten Betrag, z. B. zunächst auf 150°, verfolgen dann die Suszeptibilität bei dieser Temperatur, aber nur so lange, bis die Rückbildung zu Ende gekommen ist (längeres Tempern über das Minimum hinaus könnte die unerwünschte Neubildung eines weiteren bei 150° stabilen Zustandes herbeiführen), und erhöhen dann die Temperatur wieder um einen gewissen Betrag, usw., bis schließlich bei einer Grenztemperatur T_g der Ausgangswert der Suszeptibilität vor Beginn der Zustandsänderung erreicht wird.

1) H. Auer, Ztschr. f. Metallkde 28, S. 164—175. 1936.

Die Zuordnung der bei jeder Rückbildung noch stabil bleibenden Zustandsmenge zu der betreffenden Rückbildungstemperatur liefert die Existenzkurve des vorher gebildeten Zustandes (Abb. 4c).

Um die Bildung eines anderen Zustandes bei den schrittweisen Rückbildungen auch sicherer zu vermeiden, kann man jede Rückbildungskurve von oben her, also vom ersten Ausgangspunkt unmittelbar nach der 100° -Behandlung getrennt durchlaufen. Man

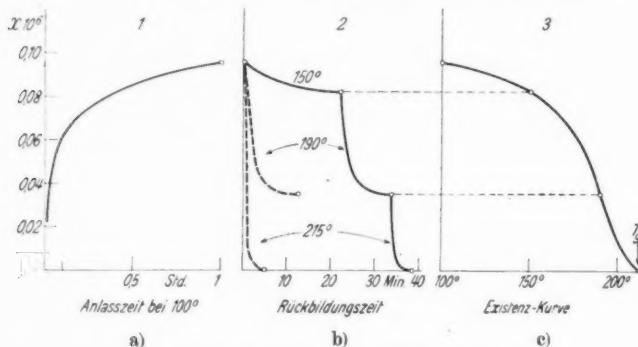


Abb. 4. Zeitlicher Suszeptibilitätsverlauf (1), Rückbildungskurven (2) und hieraus bestimmte Existenzkurve des Vorzustandes a (3) einer übersättigten Aluminium-Kupfer-Legierung

erhält dann die in Abb. 4b gestrichelt eingezeichneten Kurvenzüge. Die Übereinstimmung der Minima nach den beiden Methoden ist der Beweis, daß die Existenzkurve nicht durch einen während der Messungen sich bildenden Zustand verzerrt ist.

2. Rückbildungsanalyse einer zusammengesetzten Zustandsänderung

Verfolgt man die Suszeptibilitätsänderung der gleichen Legierung bei 150° über lange Zeiten, z. B. 10000 Std. lang, so ergibt sich die in Abb. 5 mit log. Zeitachse eingetragene Kurve. Der in der ersten Stunde gebildete Zustand ist identisch mit dem bei 100° erreichten Zustand a : er hat die gleiche Existenzkurve; bei $T_g = 215^{\circ}$ ist alles restlos rückbildungsfähig.

Nach Ablauf der ersten Stunde setzt jedoch nunmehr die Bildung eines anderen Zustandes ein, denn von hier an kann bei 220° nicht mehr alles rückgebildet werden. Der bei 220° nicht mehr zerstörbare Rest der Suszeptibilitätsänderung ist als Kurve 2 der Abb. 5 eingezeichnet; diese nähert sich allmählich der Gesamtkurve 1, d. h. der bei 220° rückbildungsfähige Zustand a wird im Laufe sehr langer Zeit

abgebaut. Die Ordinatendifferenz zwischen der Gesamtkurve 1 und dieser „Fußpunktkurve“ 2 bei 220° ist ein Maß für die zu jedem Zeitpunkt vorhandene Menge des Zustandes a , sie ist in der Kurve a der Abb. 5 (unten) als Analysenkurve dieses Zustandes wiedergegeben.

Der nach der Rückbildung bei 220° noch verbliebene Rest, der also erst nach einer Stunde gebildet wird, ist aber ebenfalls nicht beliebig stabil. Durch Temperatursteigerung auf über 270° kann

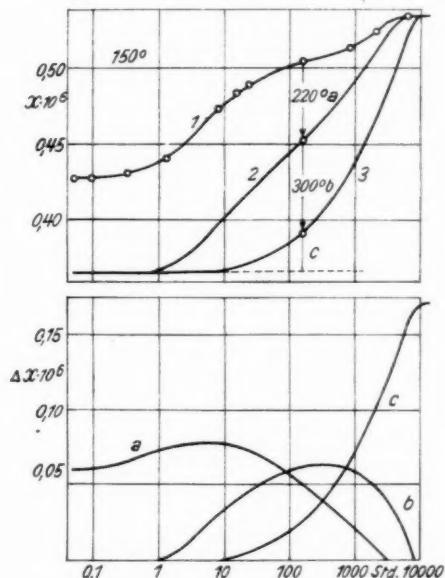


Abb. 5. Rückbildungsanalyse der Zustandsänderung bei 150° .

Oben: Suszeptibilitätsverlauf bei 150° und Fußpunktkurven nach Rückbildung bei 220° (a) und 300° (b)

Unten: Zeitlicher Verlauf der Anteile der einzelnen Zustände a , b und c , ermittelt aus den darüber stehenden Rückbildungskurven

er völlig zerstört werden. War die Probe aber länger als 10^h auf 150° erhitzt, so kann nur noch ein Teil rückgebildet werden. Was dann nach dieser zweiten Rückbildung noch übrig bleibt, ist stabil bis hinauf über 400° , bis die Löslichkeit des Mischkristalles entsprechend dem Zustandsbild alles Kupfer aufnimmt.

Die Differenz der beiden Fußpunktkurven 2 und 3 (220 und 300°) gibt die Analysenkurve des Zustandes „ b “. Die Erhöhung der 300° Fußpunktkurve gegenüber dem Ausgangswert ist ein Maß für die Menge des nicht rückbildungsfähigen Zustandes c .

Es kann somit durch diese Rückbildungsanalyse zu jedem Zeitpunkt der Anteil der einzelnen Zustände in der Gesamtzustandsänderung angegeben werden. Die Zustände selbst sind durch ihre thermische Stabilität voneinander unterschieden.

Ebenso wie in dem angeführten Beispiel für 150° kann auch für jede andere Zustandsänderung bei beliebiger Temperatur durch Rückbildungsanalyse die Bildungs- und Rückbildungsgeschwindigkeit der Zustände gemessen werden. Durch Kombinierung dieser Messungen ergibt sich aus der Temperaturabhängigkeit der Geschwindigkeit

nach der bekannten Arrheniusschen Beziehung $v = v_0 e^{-\frac{A}{RT}}$ die Aktivierungsenergie A der einzelnen Zustände, graphisch aus der Kurvenneigung im Diagramm $\ln v$ gegen $1/T$. Geradlinigkeit dieser Beziehung, d. h. konstante Aktivierungsenergie über größere Temperatur- bzw. Geschwindigkeitsbereiche ist ein Hinweis auf die Einheitlichkeit der betreffenden Zustandsänderung.

Mit Hilfe der Rückbildungsanalyse ist somit auch auf dem Wege über die Aktivierungsenergie eine Aussage über die Einheitlichkeit der Zustände möglich.

Die Auswertung unserer Messungen hat z. B. ergeben, daß für die Bildung des Zustandes a aus dem abgeschreckten Mischkristall heraus eine konstante Aktivierungsenergie von 2700 cal/mol maßgebend ist, so daß dieser Zustand als energetisch weitgehend einheitlich anzusehen ist. Auch die konstante Aktivierungsenergie von 21000 cal/mol für die Rückbildung des a -Zustandes bestätigt diesen Befund.

Diese Werte gelten für die Bildung bzw. Rückbildung des a -Zustandes aus dem *abgeschreckten* Mischkristall. Fehlen die beschleunigenden Abschreckspannungen, so steigt die Aktivierungsenergie auf 5900 cal/mol für die a -Bildung aus dem langsam gekühlten Al-Cu-Mischkristall, die Konstanz der Aktivierungsenergie und damit Einheitlichkeit des Zustandes bleibt dabei aber gewahrt.

Durch die Rückbildungsanalyse gewinnt man somit aus der Herabsetzung der Aktivierungsenergie ein energetisches Maß für die wirkenden Abschreckspannungen.

Für die Bildung des Zustandes b ergibt sich in der Darstellung $\ln v$ gegen $1/T$ keine Gerade, sondern ein gebrochener Linienzug, was auch hiernach auf eine Uneinheitlichkeit in der Stabilität dieses Zustandes hinweist.

An diesem uneinheitlichen Zustand b können wir somit die in den Abschn. III—V gebrachten grundsätzlichen Überlegungen demon-

strieren. Die experimentellen Unterlagen hierfür sind den in der Abb. 6 zusammengefaßten Meßergebnissen zu entnehmen.

Wir gehen von der Suszeptibilitätsänderung bei 100° aus, wie sie in Abb. 4a wiedergegeben und in Abb. 6 durch den vertikalen Pfeil bei 100° angedeutet ist. Erhöht man von irgendeinem Zwischenpunkt der Kinetik, z. B. von dem Wert nach 15 oder 30 Min. die Temperatur rasch auf 150° , dann wird der Zustand a kontinuierlich je nach der vorher gebildeten Menge auf- oder abgebaut, bis der

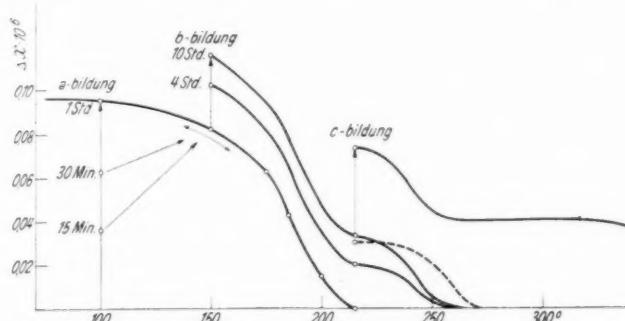


Abb. 6. Suszeptibilitätsänderung einer Aluminium-Kupfer-Legierung bei bestimmter Anlaßbehandlung auf verschiedenen Temperaturen

für die neue Temperatur stabile Wert erreicht ist. Ein solcher Verlauf einer Wechselkinetik stellt das typische Verhalten eines einheitlichen Zustandes dar.

Nach Erreichen des maximalen Wertes kann bei Temperatursteigerung oder -senkung die Existenzkurve völlig reversibel durchlaufen werden, was durch den doppelseitigen Fall angedeutet ist. Diese reversible Existenzkurve hat — und auch das ist ein wesentliches Kennzeichen für den einheitlich aufgebauten Zustand — denselben Verlauf, gleichgültig bei welcher Temperatur der Zustand vorher aufgebaut wurde. Alle bei beliebiger Temperatur auftretenden Atomkomplexe haben im Mittel die gleiche Temperaturbeständigkeit.

Tempert man hingegen nach Erreichen der maximalen a -Menge bei 150° noch längere Zeit weiter, so wird erwartungsgemäß die schon in Abb. 5a gebrachte 150° -Kinetik 1 durchlaufen, d. h. es bildet sich jetzt zusätzlich eine gewisse b -Menge, was durch den weiteren Suszeptibilitätsanstieg entsprechend dem 2. senkrechten Pfeil mit den Anlaßzeiten 4 und 10 Std. zum Ausdruck kommt.

Bei kurzdauernden Temperaturerhöhungen bis 215° durchlaufen wir nunmehr Existenzkurven von a , die um den Betrag des in diesem

Temperaturbereich noch nicht rückbildungsbaren *b*-Zustandes parallel verschoben sind.

Über 220° , wenn also alles *a* schon restlos zerstört ist, setzt nun auch eine allmähliche Rückbildung von *b* ein. Der Mechanismus dieser Rückbildung ist jedoch von dem vorher beschriebenen Verhalten des Zustandes *a* völlig verschieden. Zwar kann auch hier bei Temperatursteigerung auf über 270° alles weggenommen werden. Es ist aber nicht möglich in diesem Temperaturgebiet von $220-270^{\circ}$ einen Neuaufbau von *b* zu erzielen, obwohl ein Teil des vorher bei tieferer Temperatur gebildeten *b*-Zustandes auch hier durchaus stabil ist. Wir haben also für jede *b*-Menge eine eigene Existenzkurve, die nur in Richtung steigender Temperatur durchlaufen werden kann.

Wir sehen in der Unmöglichkeit einer Neubildung von *b* bei höherer Temperatur einen Hinweis darauf, daß der Bildungsmechanismus dieser Zustände durch einen der Volmerschen kritischen Keimbildungsgröße ähnlichen Vorgang bedingt wird, so wie wir es im Abschn. V beschrieben haben.

Es ist nun interessant, den Verlauf dieser nur in abfallender Richtung möglichen Existenzkurven, die wir „Abbaukurven“ nennen wollen, für den Zustand *b* bei verschiedener Vorbehandlung zu verfolgen. In diesen Abbaukurven kommen nämlich deutlich die verschiedenen Verteilungskurven des uneinheitlichen Zustandes zum Ausdruck, da sie ja durch Überlagerung der abfallenden Äste der Verteilungskurven zustande kommen.

Man kann durch Aufnahme der Abbaukurven Aussagen über die anteilmäßige Zusammensetzung verschieden stabiler Bindungen eines uneinheitlichen Zustandes machen und ihre Beeinflußbarkeit durch verschiedene Faktoren, wie Anlaßtemperatur und -Zeit, Abkühlungs- oder Erhitzungsbedingungen studieren.

Einzelheiten über die vorliegenden Untersuchungen würden in diesem Rahmen zu weit führen und werden an anderer Stelle veröffentlicht. Wir bringen hier nur ein Beispiel, wieder am System $Al + 5\% Cu$:

Läßt man eine bestimmte Menge *b* einmal bei 150° , ein andermal bei 215° sich bilden, und nimmt sodann durch weitere Temperatursteigerung von $215-270^{\circ}$ die Abbaukurven auf, so ergibt sich, daß im zweiten Fall die Abbaukurve beträchtlich über der des bei 150° gebildeten Zustandes liegt. Das bedeutet: Eine bestimmte *b*-Menge, die sich bei 150° gebildet hat, enthält einen größeren Anteil schwächer gebundener Komplexe, als wenn sie bei 215° entstanden wäre. Die mittlere Verteilungskurve ist bei höherer Bildungs-

temperatur zu stabileren Komplexen hin verschoben, genau wie wir es in Abschn. IV entwickelt haben.

Noch stärker kommt dieser Effekt zur Geltung, wenn man durch besonders schnelles Hochheizen der Proben auf die Bildungstemperatur dafür sorgt, daß auch nicht während der Anheizzeit beim Durchlaufen der tieferen Temperaturen schwächere Bindungen sich ausbilden können. Wir haben gemeinsam mit Herrn Healy hierzu eine Apparatur mit Hochfrequenzheizung („Prestoofen“) entwickelt¹⁾, die es fernerhin ermöglicht, nach dem „Prestoanheizen“ für einige Sekunden soweit, z. B. auf 250°, zu überhitzen, daß alle beim Ansteigen gebildeten schwächeren Komplexe wieder zerstört werden.

Läßt man nach dieser Überhitzung nunmehr bei 215° b bilden und nimmt dann durch Temperatursteigerung die Abbaukurve auf (in Abb. 6 gestrichelt eingezeichnet), so zeigt das Ergebnis die starke Verschiebung der Verteilungskurven gegenüber den Abbaukurven bei normalem Anheizen.

Bei längerem Tempern auf Temperaturen über 150° tritt schließlich noch der Zustand c auf, der bezüglich seiner thermischen Stabilität der endgültigen Ausscheidung der Verbindung CuAl₂ gleichzusetzen ist. Er ist nicht rückbildungsfähig, seine Existenzkurven in Abb. 6 sind zuerst horizontale Geraden, die erst merklich abfallen, wenn durch die zunehmende Löslichkeit des Mischkristalls die Menge der ausgeschiedenen Verbindung abnimmt. Die c-Existenzkurven fallen schließlich auf Null bei der Temperatur, bei der der Mischkristall mit der vorhandenen Konzentration gerade gesättigt ist.

Bei diesem Abfall der Existenzkurven handelt es sich jedoch nicht mehr um eine Rückbildung im eigentlichen Sinne, da bei ihrem Durchlaufen der Gleichgewichtszustand der Phasen sich merklich verändert.

Zusammenfassung

I. Die unter dem Namen „Rückbildungsverfahren“ eingeführte systematische Temperaturbehandlung von Legierungen während des Ablaufs von Zustandsänderungen wird auf ihre physikalischen Grundlagen hin untersucht.

Nach einem Überblick über die Bedingungen, unter denen bei Temperatursteigerung eine rückläufige Eigenschaftsänderung auftreten kann, erörtern wir das Entstehen von sogenannten Vorzuständen, die für die technische Aushärtung (Vergütung) verantwortlich sind und auf einer Anreicherung der einen Atomsorte im Gitter des über-

1) H. Auer u. G. W. Healy, Ztschr. f. Metallkde (im Druck).

sättigten Mischkristalls beruhen. Die Konkurrenz zwischen den diese Anreicherung bewirkenden atomaren Kräften einerseits und der thermischen Energie anderseits bewirkt eine Temperaturabhängigkeit in der Bildungsmöglichkeit der Vorzustände, die dementsprechend mit steigender Temperatur nach einer bestimmten „Existenzkurve“ abfällt.

II. Aus solchen Vorstellungen über den Mechanismus einer rückläufigen Eigenschaftsänderung ergeben sich verschiedene Bedingungen für die Durchführbarkeit des Rückbildungsverfahrens.

III. Der energetische Aufbau der Vorzustände kann entweder einheitlich sein, d. h. die Atome in den Anreicherungskomplexen sind mit gleichmäßiger Stabilität gebunden, oder aber die Bindungen können sich uneinheitlich entsprechend irgendeiner regelmäßigen Verteilungskurve über einen größeren Bereich thermischer Stabilität erstrecken.

IV. Die verschiedene Einheitlichkeit im atomaren Aufbau der Vorzustände muß in einem sehr verschiedenen Verhalten bei bestimmter thermischer Behandlung (Wechselkinetik) zum Ausdruck kommen. Eine quantitative Verfolgung der Bildung und Rückbildung von Vorzuständen bei solchen Temperaturwechseln ermöglicht daher Schlüsse auf den energetischen Aufbau der Atombindungen in den Anreicherungen.

V. Eine auftretende Temperaturhysterese in der Bildungsgeschwindigkeit bestimmter Zustände führt auf einen Bildungsmechanismus, der in gewisser Analogie zu den Vorstellungen der Volmerischen Keimbildungstheorie steht.

VI. Eine gedrängte Auswahl aus dem zum Teil in anderen, rein metallkundlichen Arbeiten der Verff. veröffentlichten Material zeigt am Beispiele des Systems Aluminium-Kupfer, wie die physikalisch entwickelten Vorstellungen eine volle experimentelle Bestätigung finden. Darüber hinaus wird durch das Rückbildungsverfahren sowohl eine Analyse komplizierter Zustandsänderungen als auch eine quantitative Bestimmung von Aktivierungsenergien und inneren Spannungen während der Bildung der Vorzustände ermöglicht.

München, Physikalisches Institut der Universität, Sept. 1939.

(Eingegangen 22. Dezember 1939)

**Versuche zur elektrolytischen Abscheidung
von weichem γ -Mangan¹⁾**

Von Ernst Herrmann

(Mit 4 Abbildungen)

Einleitung

Bei der Elektrolyse wässriger Mangansalzlösungen scheidet sich das Metall bekanntlich in der γ -Form ab, deren Stabilitätsbereich oberhalb von 1191°C liegt. Von Autoren wie Allmand und Campbell(1), Bradt und Oaks(2), die hierzu Versuche angestellt haben, wird immer wieder die große Sprödigkeit der erhaltenen Proben betont. Fink und Kolodney(3) finden das erhaltene Mn hart und widerstandsfähig gegen Kratzen und Schaben. Sie nehmen an, daß das „reine Metall in ausgeglühtem Zustand“ weich ist. Westgren und Phragmén(4) berichten über weiche elektrolytische γ -Mangan-Proben, die sie jedoch nicht selbst herstellten. Lediglich Brunke(5) gibt eine genaue Beschreibung eines Verfahrens, nach dem er mit einer Lösung nach Angabe von Grube und Metzger(6) erstmalig weiches Elektrolytmangan in einer Form erhalten hat, die zu Untersuchungen brauchbar war.

Apparatur

Eine Ergänzung dieser Versuche bildet die folgende Arbeit, in der im wesentlichen nach den Angaben von Brunke vorgegangen wurde. Bei den dafür notwendigen konzentrierten Lösungen von Manganchlorür und Ammoniumchlorid und hoher Stromdichte (etwa 0.2 A/cm^2) besteht nun eine besondere Schwierigkeit darin, daß der Niederschlag leicht Verästelungen bildet. Diese können durch dauerndes Wischen über den Niederschlag hintangehalten werden. Ich benutzte eine Wischvorrichtung, wie sie in Abb. 1 und 1a gezeigt ist. Der kräftige, keilförmige Wischer W wird durch den Exzenter E auf und ab bewegt und glättet den Niederschlag N auf der Kathode K zufriedenstellend. Das Metall war an den vom Wischer gründlich bearbeiteten Stellen merklich dichter als an den Randstellen, die durch den Wischer nicht mehr erreicht werden konnten. Die Form der Kathode aus Aluminium erkennt man aus Abb. 2. In einem Abstand von 4 mm parallel zum Rand waren schmale Rillen

1) Vorgetragen auf der Tagung des Gauvereins Hessen der D. Phys. Ges. am 8. 7. 1939; vgl. Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, S. 120. 1939.

eingeschnitten, außerhalb derer die Elektrode, auch auf der Rückseite, mit gut isolierendem Einbrennlack überzogen war. Die Rillen verhinderten abnorm hohe Kraftliniendichte an den Rand-

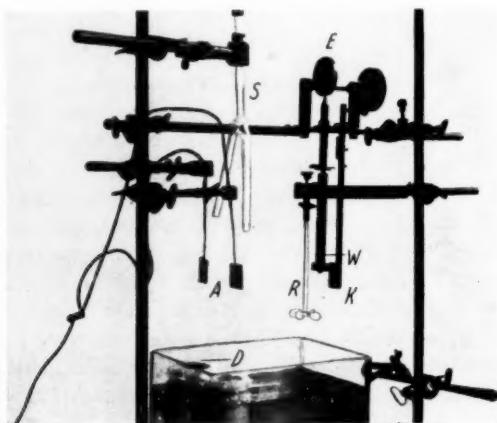


Abb. 1. Apparatur

gebieten der wirksamen Kathodenfläche. Diese hatte eine Größe von $2 \times 2,5 \text{ cm}^2$ und wurde vor jedesmaligem Gebrauch poliert und sorgfältig gereinigt. Kanten und Ecken waren abgerundet. Die

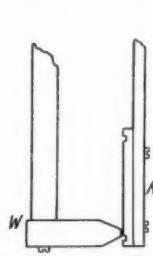


Abb. 1a. Wischer und Kathode



Abb. 2. Form der Kathode

Anoden *A* bestanden aus 2 Platinblechen, die in poröse Tontöpfe *D* gesetzt der Kathode gegenüberstanden. Gewöhnliche Tonzyylinder wurden bald für anodenseitig gebildeten kolloidalen Braunstein durchlässig. Aus diesem Grunde wurden sie mit käuflichem Cellophan umkleidet, das für Kolloidteilchen undurchlässig ist. Die damit verbundene Zunahme des elektrischen Widerstands ist auch bei 3- bis

4 facher Schichtlage kaum merklich. Unmittelbar neben der Kathode saß ein Propellerrührer *R* aus Glas, der für heftige Durchmischung und Bewegung des Bades sorgte. Hier wurde besonders darauf geachtet, daß durch zu schnelles Rühren nicht dauernd Luft in das Bad gesaugt wurde, wodurch die Oberfläche des gebildeten Niederschlags hätte oxydiert werden können. An der Anode freiwerdendes Cl_2 wurde durch das Saugrohr *S* entfernt. Das Versuchsgefäß, eine pneumatische Wanne mit einem Fassungsvermögen von etwa 3 Liter, war zwecks Konstanthalten einer Temperatur von etwa 30°C mit Filz umkleidet. Der p_{H} -Wert der Lösung, der zwischen 6 und 8 liegen soll, wurde mit Phenolphthalein und Alizarin kontrolliert und mit reinstem Ammonhydroxyd bzw. Salzsäure korrigiert. Die Reagenzien waren von Merck und Kahlbaum (pro analysi). Außer den Elektrodenmetallen kamen nur der Einbrennlack, die Tonzellen, Cellophan, Glas und Hartgummi mit dem Bad in Berührung.

Vorversuche

Die ersten Versuche wurden unter den von Brunke angegebenen Verhältnissen mit der oben beschriebenen Apparatur gemacht. Die Ergebnisse sind in der Tab. 1 zusammengestellt. Vom ersten Niederschlag aus frischer Lösung wurde ein Teil in duktiler Form erhalten und durch eine Debye-Scherrer-Aufnahme als γ -Mangan identifiziert. Jedoch der größte Teil war spröde und haftete außerordentlich fest an der Kathode. Zugabe von Aldehyden und SO_3 -Ionen brachte keine Änderung, vielmehr ergab sich, daß das Bad, einmal benutzt, immer schlechtere Eigenschaften bekam und die Niederschläge spröder wurden. Einführung einer löslichen Mangananode und Änderung der Badtemperatur führten ebenfalls zu keinem Erfolg.

Für die Ursache der Sprödigkeit gab folgende Beobachtung einen Anhalt: von MnCl_2 -Salz von Kahlbaum stand ein weniger reines Präparat in einer schon angebrochenen Packung zur Verfügung. Darin deuteten einige etwas dunkel gefärbte Kristalle auf einen, wenn auch nur geringen, Gehalt an Mn-Oxyden. Die Lösung dieses Salzes unterschied sich rein äußerlich nicht von der des „p.a.-Salzes“. Es war aber auch schon der erste Niederschlag aus der frisch bereiteten Lösung äußerst spröde im Gegensatz zu den ersten Niederschlägen aus den anderen Lösungen, die wenigstens ab und zu einen Teil weichen Materials lieferten. Dieser Unterschied war auffallend und läßt es möglich erscheinen, daß neben Wasserstoff auch geringe Spuren von Oxyden bzw. Mn^{IV} -Ionen die Sprödigkeit des Niederschlags entscheidend beeinflussen. Der Abscheidung von Oxyden an der Kathode

Tabelle 1

Ver- such Nr.	Elektrolyt	Dauer Stdh.	Kathode	Zusätze	Temperatur in °C	Strom- dichte Amp./cm²	Wisch- geschw. Touren Min.	μ_H	Ergebnisse an den Niederschlägen N
1	frische Lsg. nach Brunke	21/2	Al	—	31	0,25	42	~ 2	Eine Ecke des N <i>weich</i> , sonst dünn, spröde, festhaftend
6	frische Lsg. (Brunke)	3	Al (poliert)	—	27,7—30,5	0,20	92	~ 7	Einige Mittelteile des N <i>weich</i> , Anfanglich nur Abbeulen von sprödem Mn
8	frische Lsg. "Reines" MnCl ₂	4	Al (poliert)	Acetaldehyd 5 cm ³ /l	29,8—30,6	0,25	85	~ 7	N sehr spröde, sehr dicht, wenig verästelt.
11	Katholyt (w. o.) Anolyt NH ₄ Cl beide frisch	3	Al (poliert)	—	29,8—30,3	0,20	94	~ 7	Weiche Platte, metallisch glänzend
12	von Vers. 11	4	Al (poliert)	—	29,2—30,2	0,20	84	~ 7	Weiche Platte, etwas härter als von Versuch 11
14	frische Lsg. wie bei 11	4	Al (poliert)	—	29,9—30,3	0,20	100	~ 7	Weiche Platte, 0,35 mm stark (vgl. Abb. 3 u. 4)
15	Bad 14	3	Al (poliert)	—	30,1—30,5	0,20	100	~ 7	Weiche Platte, nicht so schön wie von 14 (vgl. Abb. 3 u. 4)

wird zwar weitgehend durch den Zusatz von NH_4^+ -Ionen begegnet, andererseits herrscht aber anodenseitig eine dauernde Oxydationsatmosphäre durch die Abscheidung von Cl_2 , die die Oxydation zu Mn^{IV} -Ionen bewirken könnte.

Hauptversuche

Es schien daher angebracht, einen Anolyten, der keine Mn-Ionen enthält, zu benutzen (3), z. B. Ammonchlorid. Als Katholyt blieb die



Abb. 3. Vorderseite von Blechen aus elektrolytischem γ -Mn
(nat. Größe)



Abb. 4. Rückseite von Blechen aus elektrolytischem γ -Mn

Lösung nach den Angaben von Grube und Metzger, wie sie bei Brunke benutzt wurde, bestehen. Das Resultat war nach 3 stündiger Versuchsdauer eine schöne zusammenhängende Platte (vgl. Tab. 1, Versuch Nr. 11). Das Metall war weich und biegsam, die ganze Platte ließ sich leicht von der Elektrode entfernen und zeigte keine Stellen, die spröde waren. Ein unmittelbar folgender Versuch 12 lieferte eine zweite Platte von ebenfalls weichem γ -Mangan, jedoch ergab schon am nächsten Tage dieselbe Lösung sprödes Mn. Um die Reproduzierbarkeit der erhaltenen Resultate zu prüfen, wurden

in Versuch Nr. 14 mit frischer Lösung und anschließend in Nr. 15 zwei weitere Niederschläge hergestellt, die beide vollkommen weich waren. Die Abb. 3 und 4 zeigen diese Proben mit Vorder- und Rückseite. Die Durchschnittsdicke von Nr. 14 betrug 0,35 mm.

Das elektrolytisch abgeschiedene weiche Mn hatte ein metallisch glänzendes Aussehen. Es oxydierte jedoch sehr rasch an der Luft, besonders in Gegenwart von Feuchtigkeit. Weder das Arbeiten in CO_2 -reicher Atmosphäre, noch das sofortige Eintauchen des frisch erzeugten Niederschlags in absoluten Alkohol konnten diese Oxydation hindern. Nach Fink und Kolodney (3) behält das Metall seinen ursprünglichen Glanz, wenn es sofort nach Herausnahme aus dem Bad in einer etwa 5%igen Lösung von Na-Bichromat passiviert wird. Offenbar bildet sich bei dieser Behandlung ein sehr dünner oberflächlicher Oxydüberzug, der noch keine Lichtinterferenz zeigt, aber das Material vor tiefergreifender Oxydation schützt.

So vorbehandelt konnten meine Niederschläge sogar mit Wasser abgespült werden, ohne daß ihr metallisches Aussehen dadurch litt.

Zusammenfassung

Zur Abscheidung von weichem Elektrolytmangan werden in Erweiterung früherer Versuche von Brunke als beste Bedingungen zur Herstellung von etwa 0,4 mm dicken zusammenhängenden Blechen ermittelt:

Anolyt: Gesättigte Ammonchloridlösung.

Katholyt: Frisch angesetzte Lösung nach früheren Angaben von Grube und Metzger.

Temperatur: 30°C .

Anode: Pt-Bleche in Tonzyllindern mit Cellophan umkleidet.

Kathode: Al-Elektrode in Form der Abb. 2.

p_{H} -Wert: etwa 7.

Stromdichte: 0,2 Amp./ cm^2 .

Zur Glättung des Niederschlags und Verhinderung der Bildung von Verästelungen soll ein Wischer etwa 100 mal/Minute über die Kathode auf- und abbewegt, und das Bad lebhaft durchmischt werden, jedoch nicht so stark, daß etwa eingesaugte Luft Oxydation und damit Verfärbung des Kathodeniederschlags bewirken könnte. Anodenseitig entwickeltes Cl_2 ist durch Absaugen zu entfernen.

Die Arbeit wurde im physikalischen Institut Marburg durchgeführt. Herrn Geheimrat Grüneisen danke ich für die Anregung hierzu und sein förderndes Interesse.

Literatur

- 1) A. J. Allmand u. A. N. Campbell, Trans. Faraday Soc. **19**, 559;
20. S. 379. 1924.
- 2) W. E. Bradt u. H. H. Oaks, Trans. Elektrochem. Soc. **71**, 279. 1937.
- 3) G. Fink u. Kolodney, Trans. Elektrochem. Soc. **71**, 287. 1937.
- 4) A. Westgren u. G. Phragmén, Ztschr. f. Phys. **33**, 777. 1925.
- 5) F. Brunke, Ann. d. Phys. [5] **21**, 150. 1934.
- 6) G. Grube u. Metzger, angegeben bei F. Förster, Elektrochemie der wäßrigen Lösungen S. 560. 1922.

Marburg/Lahn, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. Dezember 1939)

**Änderung der thermischen Ausdehnung
und des elektrischen Widerstandes von γ -Mangan
beim Übergang zur α -Phase¹⁾**

Von Hanns-Dieter Erfling

(Mit 2 Abbildungen)

1. Einleitung

Die sichere Herstellungsmethode zur elektrolytischen Abscheidung von dünnen Blechen weichen γ -Mangans, die in der vorstehenden Arbeit angegeben ist, bringt uns die Möglichkeit, die physikalischen Eigenschaften dieser Phase, über die nur wenige Beobachtungen bisher gesammelt werden konnten, zu studieren. Im folgenden werden die Ergebnisse über die Untersuchung der vollkommen unbekannten thermischen Ausdehnung und des elektrischen Widerstandes, der bisher nur von Brunke (1) beobachtet wurde, mitgeteilt. Da sich γ -Mn bei Zimmertemperatur mehr oder weniger schnell in die stabile α -Modifikation umwandelt, ist eine solche Untersuchung unmittelbar nach Herstellung der Proben auszuführen. Für Ausdehnung und Widerstand konnten die Beobachtungen während der Umwandlung fortgesetzt werden.

2. Die Proben

Die Niederschläge waren weich und biegsam, eine Laueaufnahme ließ keine Vorzugsrichtungen erkennen, ihren Reinheitsgrad zeigt das kleine Widerstandsverhältnis $R_{-194,16} : R_{0^\circ\text{C}} = 0,132$ an. Von den Blechen Nr. 6, 11 und 14 (vgl. vorstehende Arbeit, Tab. 1) konnten die zur Verwendung kommenden Stücke einfach mit der Schere ab- und zurechtgeschnitten werden. Schmale Streifen rollten sich dabei spiraling auf. Bereits nach 6 Tagen waren die Bleche jedoch hart und spröde geworden. Ebene Proben fingen zu dieser Zeit an, sich infolge innerer Spannungen von selbst zu krümmen, bogen sich aber später wieder gerade, was auf die fast vollendete Umwandlung hinwies.

3. Thermische Ausdehnung

γ -Mn: Zur Untersuchung der thermischen Ausdehnung fand das von Adenstedt (2) abgeänderte Fizeausche Interferenzverfahren Verwendung, das sich bei blattförmigen Proben bereits bewährte (3).

1) Vorgetragen auf der Tagung des Gauvereins Hessen der D. Phys. Ges. in Nauheim am 8. 7. 1939; vgl. Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, S. 121. 1939.

Die Ausdehnungskoeffizienten (β = linearer AK. $= \frac{1}{3}$ Volum-AK. α) wurden in kleinen Intervallen zwischen $+20^\circ$ und -70° C gemessen. Mittelwerte der Ergebnisse an Proben vom Niederschlag Nr. 6 und 14 von 4,5 bzw. 6,7 mm Länge zeigt die Tab. 1 und die Kurve für γ -Mn (1. Tag) der Abb. 1.

Tabelle 1
Linearer Ausdehnungskoeffizient von γ -Mn

Δt in $^\circ$ C	$\bar{\beta} \cdot 10^{-6}$	Δt in $^\circ$ C	$\bar{\beta} \cdot 10^{-6}$
$+20$	14,75	-40	13,16
$0/-20$	14,43	$-58,81$	12,55
$-20/-40$	13,78	-70	

Die Veränderung des AK. im Verlauf der Umwandlung ist aus Tab. 2 ersichtlich, die eine Zusammenstellung der Werte $\bar{\beta}_{0^\circ\text{C}}^{+20^\circ}$ zeigt, die an den beiden oben bezeichneten Proben und einer dritten vom Niederschlag Nr. 11 während 40 Tagen gemessen wurden. Alle lassen sich durch eine Kurve erfassen (Abb. 2, Kurve 1). Bereits nach 4 Tagen beginnt der AK. vom Wert $14,70 \cdot 10^{-6}$ erheblich zu wachsen, um nach etwa 20 Tagen den konstant bleibenden Wert von $22,29 \cdot 10^{-6}$ zu erreichen. Dieser hohe AK. kommt also der α -Phase zu, obwohl sie eine höhere Dichte (7,4) hat als das γ -Mn (7,2).

Tabelle 2
Veränderung von $\bar{\beta}_{0^\circ\text{C}}^{+20^\circ}$ im Verlauf der Umwandlung

1. Tag	$\bar{\beta} = 14,70$	Niederschl. 14	21. Tag	$\bar{\beta} = 22,20$	Niederschl. 14
3. "	14,79	6	25. "	22,27	14
4. "	15,04	11	31. "	22,32	6
6,5 "	19,21	6	37. "	22,29	6
11. "	22,09	14	40. "	22,29	14

Die gestrichelt gezeichnete Kurve der Abb. 1 für γ -Mn, am 6. Tage für Abkühlung und Erwärmung aufgenommen, zeigt bereits eine wesentliche Veränderung des AK. sowohl hinsichtlich der Größe wie auch des Abfalls nach tieferen Temperaturen. Letzteres ist zunächst merkwürdig verzögert. Mit in die Abb. 1 hinzugenommen ist die zweite gestrichelt angeführte Kurve für in N_2 -Atmosphäre gebrühtes β -Mn (3), wobei sich nach Ochsenfeld (4) γ -Mn bilden sollte. In der Tat nähert sich diese Kurve derjenigen für γ -Mn beträchtlich.

α -Mn: Die Temperaturabhängigkeit des AK. der in α -Mn umgewandelten Proben Nr. 6 und 14 wurde bis -195° C beobachtet. Tab. 3 und die Kurve für α -Mn der Abb. 1 zeigen die Resultate.

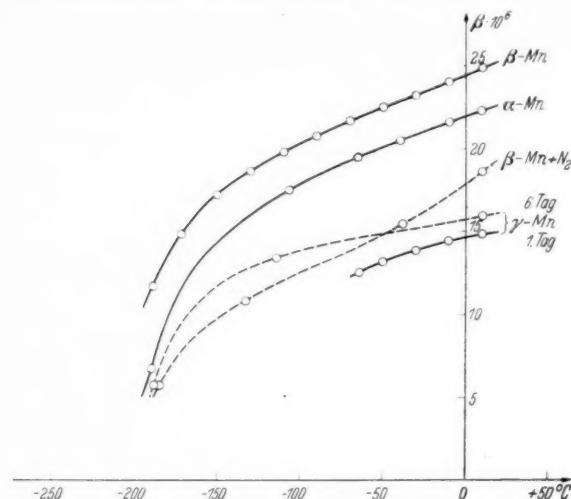
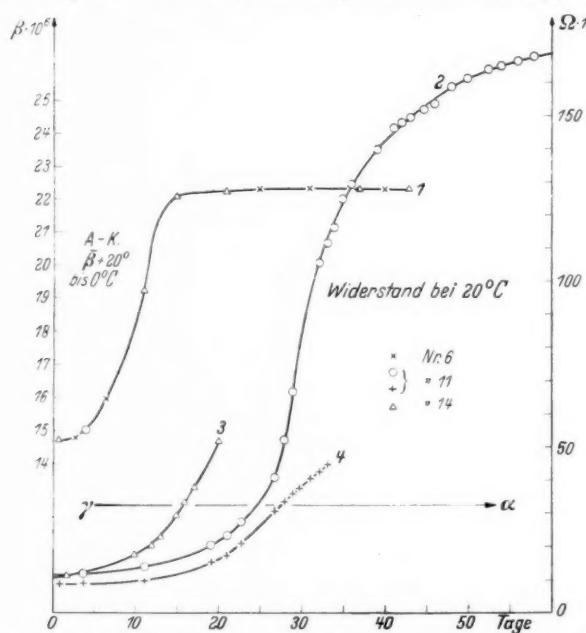
Abb. 1. Temperaturverlauf des Ausdehnungskoeffizienten von α -, β - und γ -MnAbb. 2. Ausdehnungskoeffizient und Widerstand während der Umwandlung von γ - in α -Mn

Tabelle 3

Linearer Ausdehnungskoeffizient von α -Mn (aus γ -Mn) $\Theta = 460$; $Q_0 = 84,0$ kcal; $k = 3,0$ [vgl. (5)]

Δt in $^{\circ}\text{C}$	$\beta \cdot 10^{-6}$ beob.	$\beta \cdot 10^{-6}$ ber.	Δt in $^{\circ}\text{C}$	$\beta \cdot 10^{-6}$ beob.	$\beta \cdot 10^{-6}$ ber.
+ 20/ 0	22,29	22,16	- 60/- 70	19,50 ₅	19,41
0/- 20	21,63	21,52	- 70/- 183	15,61	14,85
- 20/- 60	20,51	20,54	- 183/- 195,62	6,75	7,30

Der AK. fällt stark nach tiefen Temperaturen hin ab, eine Wiedergabe dieses Absinkens nach Grüneisen (5) gelingt mit einer Debye-Temperatur $\Theta = 460$ in höherer Temperatur einigermaßen. Das gleiche hatte sich bereits für β -Mn gezeigt (3), dessen AK. als Funktion der Temperatur zum Vergleich ebenfalls in Abb. 1 aufgenommen ist; ihm entspricht ein Θ von etwa 330. Für γ -Mn ist eine Θ -Berechnung wegen des Fehlens der β -Werte in tiefer Temperatur nicht durchgeführt; es läßt sich aber abschätzend sagen, daß der Θ -Wert dieser Phase wohl unter $\Theta = 400$ bleiben wird.

Unlängst hat Kelley (6) die spezifische Wärme von α -Mn an 99 % Material zwischen $+20^{\circ}$ und -220°C gemessen und für die Wiedergabe seiner Meßwerte ein Θ von 344 geeignet gefunden. Nimmt man seinen Wert für C_p bei Zimmertemperatur und die Kompressibilität κ nach Bridgman für alle 3 Phasen an, so erhält man mit den jetzt ermittelten Werten des AK. für die Zahl $\gamma_{+10^{\circ}\text{C}} = \frac{a \cdot V}{\kappa \cdot C_p}$ (V = Atomvolumen):

$$\alpha\text{-Mn: } \gamma = 2,37 \quad \beta\text{-Mn: } \gamma = 2,68 \quad \gamma\text{-Mn: } \gamma = 1,61.$$

Es sei noch ein kurzer Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren bezüglich der Ausdehnung von α -Mn angeführt:

Disch (7) $\beta_{0^{\circ}\text{C}}^{+100^{\circ}}: 22,8 \cdot 10^{-6}$ (techn. Mn)	Erfling $\beta_{0^{\circ}\text{C}}^{+20^{\circ}}: 22,29 \cdot 10^{-6}$ (α -Mn aus γ -Mn umgew.)
Johannsen u. Nitka (8) (~ 95 % Mn) $\beta_{0^{\circ}\text{C}}^{+150^{\circ}}: 19,7 \cdot 10^{-6}$	Erfling $\beta_{0^{\circ}\text{C}}^{+20^{\circ}}: 21,80 \cdot 10^{-6}$ (gewalztes Mn 99 %)

Daß auch auf andere Weise hergestelltes α -Mn die gleiche Ausdehnung wie das aus γ -Mn umgewandelte hat, zeigt meine Messung an gewalztem Mn (~ 99 %)¹, das aus einmal destilliertem Mn hergestellt ist, und die Messung von Disch. Die Werte an unreinigerem technischem Material sind niedriger. Nach Johannsen und Nitka,

1) Für die freundl. Überlassung dieser Probe danke ich Herrn Dr. Kroll-Luxemburg.

die röntgenographisch reines und unreines Mn bei höheren Temperaturen verglichen, hat das reinere etwa um 20 % größere Werte des AK., was zu meinen Ergebnissen qualitativ paßt.

4. Elektrischer Widerstand

γ -Mn: Aus den Niederschlägen 14 und 11 wurden 1 bzw. 2 Streifen von 2,3 cm Länge und 0,2—0,3 cm Breite für die Widerstandsmessungen herausgeschnitten und durch Glimmer geschützt zwischen Messingbacken gebracht. Die Probe 14 mit gleichmäßigen Querschnitt, der durch leichtes Befeilen noch verbessert war, kam auch zur Bestimmung des spezifischen Widerstandes in Frage, während sich die beiden anderen Proben (11a und b) hierfür weniger eigneten. Der Querschnitt wurde aus Gewicht und Dichte bestimmt. In der Tab. 4 sind meine Ergebnisse für den spezifischen Widerstand und dessen Temperaturkoeffizienten mit denen anderer Autoren zusammengestellt:

Tabelle 4
Spezifischer Widerstand ϱ und Temperaturkoeffizient TK. von γ -Mn

	t in $^{\circ}$ C	$\varrho \cdot 10^{-4}$ [$\Omega \cdot \text{cm}$]	t in $^{\circ}$ C	Mittl. TK. bezogen auf Widerst. bei 0° C	$\frac{d\varrho}{dt} \cdot 10^{-4}$
Erfling	± 0	$0,39_2$ (14) $(0,4_2)$ (11 a) $(0,4_3)$ (11 b)	$-194,19 \pm 0$ $\pm 0 / +19,2$	0,00447 0,00628	0,00246
Brunke	± 0	$0,22_8$ *)	$-78,9 / +20$	0,0053	0,00121
Valentiner u. Becker	$+ 20$	0,28 **)	$-188 / +20$	0,0039 **)	

*) Geschätzte Werte.

**) Extrapoliert auf „reines Mn“ aus Legierungen Mn-Cu.

Während der Wert für $\varrho_{0^{\circ}\text{C}}$ mit den nur geschätzten Werten von Valentiner und Becker (9) und Brunke weniger gut übereinstimmt, passen die Angaben über den Temperaturkoeffizienten gut zueinander. Der ungewöhnlich hohe TK. für γ -Mn — ein Wert, der sonst nur für die Ferromagnetika gefunden wurde — fiel bereits bei Brunkes Messungen auf und findet hier seine Bestätigung.

α -Mn: Nur an der Probe 11a konnte der Widerstand bis zur fast völligen Umwandlung in α -Mn beobachtet werden, die beiden anderen zerbrachen vorzeitig wegen innerer Spannungen (vgl. Abb. 2 Kurve 2, 3 und 4). Für den spezifischen Widerstand von α -Mn ergab sich mit dem von Probe 14 umgerechneten Formfaktor für 11a ein Wert, der in Tab. 5 mit den bereits vorliegenden Ergebnissen zusammengestellt ist.

Tabelle 5

Spezifischer Widerstand ϱ und Temperaturkoeffizient TK. von α -Mn

	t in $^{\circ}$ C	$\varrho \cdot 10^{-4}$ [$\Omega \cdot \text{cm}$]	t in $^{\circ}$ C	Mittl. TK. bezogen auf Widerst. bei 0° C	$\frac{d\varrho}{dt} \cdot 10^{-4}$
Erfling . . .	± 0	6,2 ₇	$\pm 0 + 19,25$	0,00021 ₅	0,00135
Brunke . . .	± 0	7,1 ₅	$-78,9 + 20$	0,00017	0,00121
Johannsen u. Nitka . . .	$+ 20$	5,8 ₈ (95% Mn)	$\pm 0 + 700$	0,0003	
Grube, Bayer u. Bumm .	$+ 20$	$\begin{cases} 2,7_8 \\ 3,0_0 \\ 3,3_3 \end{cases}$ gesint. Mn Schmelzfl.- Mn	$+ 20 + 100$	$\approx 0,00015$	

Die schwankenden Werte zeigen die Schwierigkeit, an Proben aus sprödem α -Mn den spezifischen Widerstand zu bestimmen. Besonders stark weichen die Ergebnisse von Grube und Mitarb. (10) an gesintertem Material ab. Wie schon beim γ -Mn passen jedoch die TK. besser zusammen. Während aber Brunke die Gültigkeit der Matthiessenschen Regel, die nach seinen Beobachtungen am Beginn der Umwandlung unzweifelhaft gut erfüllt ist, auch für den ganzen Verlauf der Umwandlung voraussetzte und dementsprechend den ϱ -Wert von γ -Mn errechnete (daher die gleichen Werte von $d\varrho/dt$ in Tab. 4 u. 5), zeigt sich bei mir $d\varrho/dt$ für α - und γ -Mn verschieden. Der spezifische Widerstand des γ -Mn ist 16 mal kleiner als der des α -Mn, während dessen TK. 29 mal kleiner ist als der des γ -Mn. So erklärt sich Brunkes abweichender Wert für $\varrho_{\gamma\text{-Mn}}$.

5. Vergleich des Anstieges von Ausdehnungskoeffizient und Widerstand

In Abb. 2 fällt das verschieden schnelle Wachstum von AK. und Widerstand auf. Es erklärt sich daraus, daß der AK. auf das 1,5fache, der Widerstand auf das 16fache wächst. Daher macht ein kleiner Zusatz des γ -Mn zum α -Mn beim AK. wenig, beim Widerstand sehr viel aus.

Zusammenfassung

An Proben aus elektrolytisch abgeschiedenem, anfänglich weichem γ -Mn werden die thermische Ausdehnung und der elektrische Widerstand und deren Änderung während der Umwandlung in die harte und spröde α -Phase untersucht: Der mittlere lineare thermische AK. hat zwischen 0° und $+ 20^{\circ}$ für γ -Mn den Wert 14,75, für α -Mn $22,29 \cdot 10^{-6}$. Der Verlauf des AK. mit der Temperatur kann beim

α -Mn mit einem Θ von 460 in höherer Temperatur einigermaßen befriedigend wiedergegeben werden. Für den spezifischen Widerstand bei 0°C ergibt sich für γ -Mn der Wert $0,39 \cdot 10^{-4}$, für α -Mn der 16 mal größere Wert $6,3 \cdot 10^{-4}$ [$\Omega \cdot \text{cm}$]; die Temperaturkoeffizienten zwischen 0° und Zimmertemperatur haben die Werte 0,00628 für γ -Mn und 0,000215 für α -Mn, unterscheiden sich also um den Faktor 29.

Herrn Geheimrat Grüneisen dankt der Verf. für die Anregung zu dieser Studie und seine Beratung, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bewilligung eines Stipendiums.

Literatur

- 1) F. Brunke, Ann. d. Phys. [5] **21**, S. 139 ff. 1934.
- 2) H. Adenstedt, Ann. d. Phys. [5] **26**, S. 69 ff. 1936.
- 3) H. D. Erfling, Ann. d. Phys. [5] **34**, S. 196 ff. 1939.
- 4) R. Oehsenfeld, Ann. d. Phys. [5] **12**, S. 381. 1932.
- 5) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. [4] **39**, S. 257 ff. 1912.
- 6) K. K. Kelley, Journ. Amer. Chem. Soc. **61**, S. 203 ff. 1939.
- 7) J. Disch, Ztschr. f. Phys. **5**, S. 174. 1921.
- 8) G. Johannsen u. H. Nitka, Phys. Ztschr. **39**, S. 443. 1938.
- 9) S. Valentiner u. G. Becker, Ztschr. f. Phys. **80**, S. 753. 1933.
- 10) G. Grube, K. Bayer u. H. Bumm, Ztschr. f. Elektrochem. **42**, S. 810. 1936.

Marburg/L., Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen: 6. Januar 1940)

Ben
der-
Mn
effi-
628
umung
ngs-

810.

Einordnung der Kossel-Möllenstedtschen Elektroneninterferenzen¹⁾ in die Raumgittertheorie

Von M. v. Laue

Die einfache, geometrische Theorie der Raumgitterinterferenzen²⁾ gibt als „Gitterfaktor“ im Intensitätsausdruck für einen Kristallblock mit den Kanten $M_1 a_1$, $M_2 a_2$, $M_3 a_3$ bekanntlich:

$$|G|^2 = \frac{\sin^2 \pi M_1 A_1}{\sin^2 \pi A_1} \cdot \frac{\sin^2 \pi M_2 A_2}{\sin^2 \pi A_2} \cdot \frac{\sin^2 \pi M_3 A_3}{\sin^2 \pi A_3},$$

wobei die Zahlen A_a als

$$(1) \quad A_a = \left(a_a, \frac{\hat{s} - \hat{s}_0}{\lambda} \right)$$

definiert sind. Handelt es sich um eine dünne Platte, und legen wir die Translationen a_1 und a_2 parallel zu ihrer Ebene, so sind im Gegensatz zu M_3 , M_1 und M_2 große Zahlen; G verschwindet, außer wenn A_1 und A_2 ganzzahlige Werte,

$$(2) \quad A_1 = h_1, \quad A_2 = h_2$$

annehmen. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so wird die Intensität proportional zu:

$$(3) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |G|^2 dA_1 dA_2 = M_1 M_2 \frac{\sin^2 \pi M_3 A_3}{\sin^2 \pi A_3}.$$

Wie ebenfalls längst bekannt, hat der hier auftretende Sinusquotient *Hauptmaxima* bei allen ganzzahligen Werten von A_3 , aber zwischen je zwei Hauptmaxima $A_3 = h_3$ und $A_3 = h_3 + 1$ ($M - 1$) Nullstellen, und zwar wo

$$A_3 = h_3 + \frac{m}{M_3} \quad (m = 1, 2, \dots, M - 1)$$

ist, und ($M - 2$) *Nebenmaxima*, diese nahe bei den Werten

$$(4) \quad A_3 = h_3^{(n)}, \quad (n = 1, 2, \dots, M - 2),$$

wenn wir die gebrochene Zahl

$$(5) \quad h_3^{(n)} = h_3 + \frac{n + \frac{1}{2}}{M_3}$$

1) W. Kossel u. G. Möllenstedt, Ann. d. Phys. [5] 36, S. 113. 1939.

2) Wie üblich bedeuten a_1 , a_2 , a_3 primitive Translationen des Raumgitters, \hat{s}_0 den Einheitsvektor in Richtung des einfallenden, \hat{s} den in Richtung des abgebeugten Strahls, und λ die Wellenlänge. Der vollständige Intensitätsausdruck enthält außer dem $|G|^2$ noch den Strukturfaktor.

setzen. Von der Ungenauigkeit dieser Angabe sehen wir hier ab, zumal der Ersatz der dynamischen durch die geometrische Theorie wohl einen größeren Fehler bedeutet. Versteht man nun unter b_1, b_2, b_3 die Grundvektoren des reziproken Gitters und setzt man einen Vektor

$$(6) \quad \mathfrak{h}^{(n)} = h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3^{(n)} b_3$$

(er ist kein Gittervektor, weil er den Nullpunkt des reziproken Gitters nicht mit einem anderen Gitterpunkten verbindet), so folgt aus (1), (2) und (4) mittels des uns für die Hauptmaxima geläufigen Schlußverfahrens:

$$(7) \quad \frac{\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0}{\lambda} = \mathfrak{h}^{(n)} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s} - \lambda \mathfrak{h}^{(n)}.$$

Indem man die zweite Form dieser Beziehung quadriert und $\mathfrak{s}_0^2 = \mathfrak{s}^2$ berücksichtigt, findet man

$$(8) \quad 2(\mathfrak{s} \mathfrak{h}^{(n)}) = \lambda \mathfrak{h}^{(n)2}.$$

Ort des Strahls \mathfrak{s} ist danach ein allein durch das Raumgitter festgelegter Kreiskegel; seine Achse ist $\mathfrak{h}^{(n)}$. (Mit $n = 0$ wäre es der Kosselkegel des Hauptmaximums h_1, h_2, h_3 .) Nur, wo er den Leuchtschirm schneidet, kann das Nebenmaximum $h_1, h_2, h_3^{(n)}$ entstehen. Damit es in einem Punkte der Schnittkurve wirklich auftritt, ist notwendig und hinreichend, daß sich aus dem diesem Punkte entsprechenden Vektor \mathfrak{s} nach (2) ein im einfallenden Strahlenbündel tatsächlich vorkommendes \mathfrak{s}_0 ergibt, d. h., daß der Punkt in dem durch Kreuzgitterwirkung erleuchteten Bereiche liegt, welcher die Indizes h_1, h_2 hat. Daß Systeme der neuen Maxima je einen solchen Bereich erfüllen, stellen Kossel und Möllenstedt ausdrücklich fest.

In ihrer Abb. 8a, in welcher sich benachbarte Bereiche dieser Art teilweise überdecken, treten nun rechts neben dem unabgebeugten Kreisbereiche zwei Hauptmaxima auf; bei passender Wahl von a_1 und a_2 lassen sie sich als 101 und 202 indizieren. Dazwischen sind 4 Nebenmaxima sichtbar. Die Strahlen \mathfrak{s}_0 , welche sie liefern, erkennt man an schwachen dunklen Streifen im unabgebeugten Kreisbereich. Wie deren Lage beweist, haben die drei ersten Nebenmaxima von links als Indizes h_1, h_2 die Zahlen 1, 0, während das vierte die Indizes 2, 0 hat. Es liegt nahe, sie unter der Annahme $M_s = 6$ von links nach rechts als

$$1, 0, 1 + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2}\right); \quad 1, 0, 1 + \frac{1}{6} \left(2 + \frac{1}{2}\right); \quad 1, 0, 1 + \frac{1}{6} \left(3 + \frac{1}{2}\right);$$

$$2, 0, 1 + \frac{1}{6} \left(4 + \frac{1}{2}\right)$$

zu indizieren; doch sei dies nur mit Vorbehalt gesagt. Die Dicke D der durchstrahlten Glimmerplatte beträgt dann 6 Netzebenenabstände, deren jeder zu $2,0 \cdot 10^{-7}$ cm anzusetzen ist¹⁾; d. h.

$$D = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ cm},$$

eine durchaus glaubhafte Zahl.

In den anderen Aufnahmen der genannten Autoren liegen Lücken zwischen den fraglichen Bereichen, so daß eine Abzählung der Nebenmaxima nicht gelingt. Aber es stimmt zu Gl.(4), daß sie in Abb. 20, die sich auf $D = 9,10^{-6}$ cm bezieht, näher beieinander liegen als in Abb. 21, für welche $D = 5,5 \cdot 10^{-6}$ cm ist.

Übrigens ist bei etwas größerem M_3 auch aus anderem Grunde Sichtbarkeit aller nach (4) möglichen Nebenmaxima nicht zu erwarten; nach (3) erhalten dann nur die einem Hauptmaximum näher liegenden genügende Intensität. Dann hat es einen Sinn, ein sichtbares Nebenmaximum dem nächsten Hauptmaximum zuzuordnen und, wie es Kossel und Möllenstedt tun, mit Beugungsfransen infolge von Spaltbeugung zu vergleichen. Dies führt sogar zu derselben Angabe über die Lage der Nebenmaxima. Den Übergang hingegen, vom Hauptmaximum $h_1 h_2 h_3$ zum Maximum $h_1, h_2, h_3 + 1$, welcher nach (3) bei kleinem M_3 gelegentlich sichtbar werden muß, umfaßt ihre Überlegung nicht. Auch tritt der Unterschied gegen unsere Ausführungen hervor, sobald man auf die Intensitäten eingeht. Bei uns bestimmt das Intensitätsverhältnis zwischen einem Haupt- und einem benachbarten Nebenmaximum außer dem Faktor $|G|^2$ auch noch der Strukturfaktor; er hat im allgemeinen nicht für beide denselben Wert, kann vielmehr im äußersten Fall das Hauptmaximum auslöschen und das Nebenmaximum nur schwächen, oder umgekehrt. Diese Unterschiede beruhen wesentlich darauf, daß der „Spiegel“ der Kossel-Möllenstedt-schen Überlegung nicht gleichmäßig „mit Streuvermögen belegt“ ist.

Wie aber erklären sich die Ausbiegungen der Nebenmaxima an allen den Stellen, an welchen eine Kikuchilinie sie überschneidet? Kikuchilinien entstehen doch durch inkohärente, die Wellenlänge vergrößernde Streuung, wovon weder die Kossel-Möllenstedtsche, noch unsere Überlegung etwas enthält. Nun, dieser Zusammenhang besteht nur mittelbar. Weil die Wellenlängenänderung unmeßbar klein ist, fallen die Kikuchilinien so gut wie vollständig zusammen mit Kosselkegeln für die ursprüngliche Wellenlänge. Wo aber ein

1) Strukturbericht der Ztschr. f. Kristallogr. Bd. II (1937), S. 546. Eine genauere Angabe ist wegen der wechselnden chemischen Zusammensetzung des Glimmers nicht möglich.

solcher Kegel liegt, treten Mehrfachinterferenzen auf, indem außer dem bisher betrachteten Beugungsstrahl \vec{s} noch ein Strahl einer Hauptinterferenz h_1', h_2', h_3' entsteht. Mehrfachinterferenzen aber sind Domäne der dynamischen Theorie, die geometrische reicht dafür nicht aus. Wir verstehen hier also zwar nicht die Gestalt jener Ausbiegungen, wohl aber, daß diese nicht gegen das hier Vorgetragene sprechen.

Eine Erklärung fordert nun noch Abb. 10 a. a. O. Eine dünne Silberschicht zeigt dort nichts von Haupt- und Nebenmaxima des Raumgitters, sondern reine Kreuzgitterwirkung. Man darf auf Grund zahlreicher Erfahrungen¹⁾ als Grund vermuten, daß diese Schicht keinen Einkristall bildet, und daß ihre Mosaikstruktur die Raumgitterwirkung verwischt. Glimmer stellt wohl wegen der einen großen Translation a_3 und der dadurch bedingten ungewöhnlichen Spaltbarkeit und Regelmäßigkeit auch in dünnen Platten einen für solche Beobachtungen besonders günstigen Ausnahmefall dar.

Damit wären wohl alle wesentlichen Züge der neuen Streifensysteme, soweit zunächst erforderlich, der Raumgittertheorie eingordnet. Konvergenz der einfallenden Strahlung ist danach für ihr Entstehen nicht erforderlich, aber freilich ein dafür besonders vorteilhaftes Verfahren.

Im Sinne einer früheren Veröffentlichung²⁾ ließe sich der hier vertretene Gedanke auch so formulieren: Im Raum des reziproken Gitters sind nicht nur die Gitterpunkte „mit Intensität belegt“, sondern die ganzen Gittergeraden parallel zu \vec{b}_3 ; und zwar gibt der Sinusquotient von Gl. (3) (abgesehen vom Strukturfaktor) die Intensitätsverteilung auf ihnen. Ein Nebenmaximum tritt in die Erscheinung, wenn die Ausbreitungskugel der Ewaldschen Konstruktion eine Stelle trifft, die vom nächsten Hauptmaximum den

Abstand $\frac{n + \frac{1}{2}}{M_3} \vec{b}_3$ hat. Konvergiert nun das einfallende Strahlenbündel, so gibt es unendlich viele Ausbreitungskugeln. Allein aus diesem Grunde ist in solchem Falle die hier gewählte Darstellung vorzuziehen.

1) Vgl. z. B. G. Menzer, Ann. d. Phys. [5]. 36 S. 239. 1939.

2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. [5] 29. S. 211. 1937.

Berlin-Dahlem, Max-Planck-Institut, im Dezember 1939.

(Eingegangen 20. Dezember 1939)

ufer
iner
aber
reicht
stalt
Vor-

inne
aum-
zahl-
inen
kung
ans-
rkeit
seob-

iften-
ein-
er ihr
anders

hier
oken
egt“,
der
anten-
Er-
Kon-
den

hlen-
esem
ehen,

anzeigen
0861,-